ISSN 0130-2221
ЯНВАРЬ 2020 · № 1

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

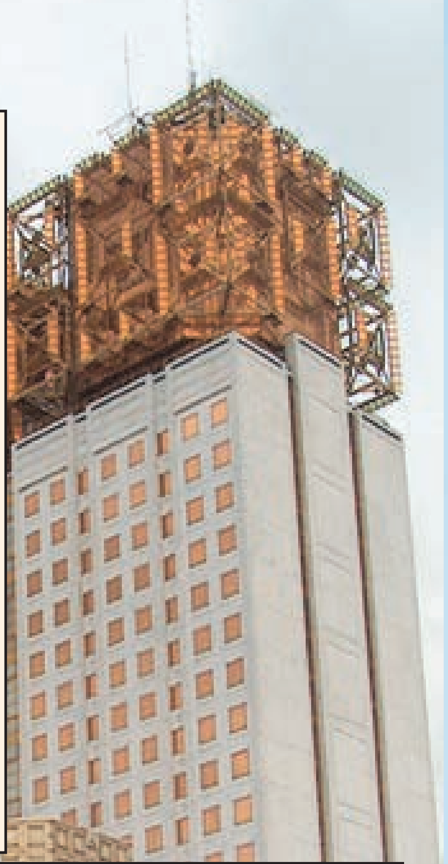
Дорогие коллеги!

По случаю 50-летия журнала «Квант» сердечно поздравляю читателей журнала и всех, кто его создает: авторов, членов редколлегии и сотрудников редакции. Для нескольких поколений школьников, интересующихся физикой и математикой, журнал стал умным собеседником и проводником в мир этих замечательных наук.

Основателями и первыми руководителями журнала были выдающиеся ученые, академики, физик Исаак Константинович Кикоин и математик Андрей Николаевич Колмогоров. С этим связаны отличительные черты «Кванта», делающие его уникальным. Во-первых, это научно-популярный физико-математический журнал, в нем представлены обе науки. Во-вторых, многие из авторов — активно действующие ученые, так что читатели журнала получают научную информацию из первых рук.

В обращении к читателям первого номера «Кванта» в далеком 1970 году редколлегия назвала его первым научным журналом для школьников. Российская академия наук и сегодня считает журнал своим важным делом, является одним из его учредителей. Хочу пожелать журналу «Квант» новых достижений в приобщении читателей к изучению науки, а юным математикам и физикам — успехов на этом трудном, но увлекательном пути.

Президент
Российской академии наук
академик РАН А.М. Сергеев



Дорогие друзья!

Отделение математических наук Российской академии наук поздравляет коллектив научно-популярного журнала «Квант» со знаменательным событием — 50-летием выхода в свет первого номера журнала.

По замыслу академиков И.К. Кикоина и А.Н. Колмогорова создание журнала «Квант» было важным элементом общей работы по поиску и поддержке талантливой молодежи. И этот замысел вполне оправдался. «Квант» стал одним из самых массовых изданий, в советское время его тиражи доходили до 300 тысяч экземпляров. Сейчас тираж более скромный, основные причины — падение престижа фундаментальной науки и смена ориентиров общего образования. Но, как и раньше, «Квант» помогает молодым людям найти свой путь в науку, к освоению и созданию новых технологий. Сейчас эта задача стоит, может быть, даже более остро. Поэтому журнал по-прежнему очень нужен школьникам, их учителям и родителям.

Хочется выразить благодарность и признательность всем, кто на протяжении 50 лет создавал журнал, отдавая ему большую часть своей жизни, авторам, сотрудничавшим с журналом на протяжении этих лет. «Квант» сохранил и развивает свои традиции, публикуя статьи высокого качества и интересные задачи. Это, безусловно, заслуга всего замечательного коллектива «Кванта». Уверены, что эти традиции сохранятся и в будущем.

Академик-секретарь Отделения
математических наук
академик РАН В.В. Козлов

Не верится, но это факт — журналу «Квант» исполняется полвека. С журналом «Квант» связаны далекие воспоминания многих людей, бывших когда-то школьниками, о своих первых шагах на пути к познанию: от процессов, имеющих чисто квантовую природу, до явлений в масштабах Вселенной. Решение многих фундаментальных задач физики требует новых знаний. Проводя эксперименты, набирая статистику, веря и ошибаясь, в стремлении приблизиться к пониманию Природы мы мыслим математическими образами. А дальше начинается самое интересное, самое сладкое время проверки гипотез. Журнал учит, как найти то, чего пока на свете нет.

Желаем журналу оставаться таким же непохожим на других и быть по-прежнему вечно молодым, как его читатели!

Академик-секретарь Отделения
физических наук
академик РАН И.А.Щербаков

КВАНТ

ЯНВАРЬ 2020 № 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

К 50-летию «КВАНТА»

Дорогие читатели!

Номер, который вы держите в руках, не совсем обычен – он посвящен 50-летнему юбилею нашего журнала. На страницах этого номера вы найдете статьи, авторы которых сотрудничали с «Квантом» в разные годы и много для него сделали.

Первый номер «Кванта» вышел в 1970 году, но создание физико-математического журнала для школьников задумывалось несколькими годами раньше. Идею создания такого журнала первым высказал академик П.Л.Капица в 1964 году, а затем она обсуждалась теми, кто в 60-х годах организовывал физико-математические школы-интернаты при крупнейших университетах, всесоюзные олимпиады, летние школы, заочную математическую школу. Это были не только академики, профессора ведущих вузов, учителя, но и молодые энтузиасты – ученые, аспиранты и студенты, для которых работа со школьниками и популяризация научных знаний стали подлинным призванием и второй профессией.

Главным редактором нового журнала стал выдающийся физик, академик Исаак Константинович Кикоин, первым заместителем главного редактора – один из величайших математиков XX века, академик Андрей Николаевич Колмогоров. Оба они руководили журналом до последних дней своей жизни. Нужно сказать, что и Исаак Константинович, и Андрей Николаевич не только сформулировали основные цели журнала, но и внимательно следили за большинством материалов, предлагавшихся для публикации, а нередко участвовали и в их непосредственном редактировании.

И.К.Кикоин говорил, что такого цветного, массового, рассчитанного на широкую аудиторию «научного журнала для школьников» не было не только в России, но и в мире. Поэтому особенно трудной, новаторской, творческой была работа по изданию журнала в первые годы и десятилетия его жизни – перед глазами не было образцов, на которые можно было бы опереться. Да, была очень качественная, яркая российская и советская научно-популярная литература по физике и математике, но журнала не было.

Каким должен быть новый журнал? На какой круг читателей он должен быть нацелен? Какая доля материалов должна быть адресована младшим школьникам, ученикам физико-математических школ, учителям, студентам? Каким должен быть уровень изложения, характер оформления? Горячие споры не затихали в редакции и на заседаниях редколлегии. В результате творческих дискуссий и напряженной работы большого коллектива единомышленников журнал постепенно менялся, возникали новые рубрики, вырабатывался свой, «квантовский» стиль оформления.

Журнал быстро стал очень популярным – в 70-е и 80-е годы его тираж достигал сотен тысяч. Он был известен и за рубежом: появились переводы на японский, греческий, в США более 10 лет издавался собрат нашего журнала под именем «Квантум», две трети их содержания которого составляли переводы статей из «Кванта». Большим событием стало создание в 80-е годы на базе журнала серии научно-популярных книг «Библиотечка «Квант», очень востребованной читателями.

Менялся формат журнала, периодичность и форма его издания. Некоторое время подписчики получали в год не 12, а 6 номеров журнала увеличенного формата, но с каждым номером они получали и приложение – либо книгу из Библиотечки «Квант», либо тематический сборник материалов со страниц журнала. При этом стиль и уровень журнала все время поддерживались на неизменном уровне. Несомненно, это заслуга редколлегии, редсовета и редакции, но ответственность лежала в первую очередь на главных редакторах журнала (И.К.Кикоин, Ю.А.Осипьян, С.С.Кротов, В.В.Козлов, А.Л.Семенов, А.А.Гайфуллин), на их первых заместителях (А.Н.Колмогоров, С.П.Новиков), на заместителях главного редактора по математике (Ю.П.Соловьев, В.М.Тихомиров, Н.П.Долбилин, П.А.Кожевников) и по физике (Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов, А.И.Черноуцан).

За 50 лет неизбежны серьезные перемены – рядом с нами сейчас нет многих из тех, кто создавал и развивал «Квант». Вспомним

Исаак Константинович Кикоин

Андрей Николаевич Колмогоров

хотя бы некоторых из тех, кто так много сделал для журнала.

Иосиф Шаевич Слободецкий и Николай Борисович Васильев благодаря своему высокому профессионализму, энтузиазму и энергии определили в первые годы качественный уровень работы редакции и редколлегии. Крупные ученые и педагоги В.И.Арнольд, В.Г.Болтянский, Н.Я.Виленкин, М.И.Каганов, А.К.Кикоин, А.И.Маркушевич, А.Б.Мигдал, Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, И.Ф.Шарыгин, активные авторы журнала К.Ю.Богданов, А.А.Боровой, Е.Я.Гик, В.Л. Гутенмахер, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, С.М.Козел, Г.И.Косоуров, Г.Л.Коткин, С.С.Кротов, В.В.Можаев, В.В.Произволов, Е.М.Раббот, А.П.Савин, В.А.Сендеров, Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский, А.В.Спивак и другие рассказывали на страницах журнала об интересных фактах и проблемах математики и физики, о новостях современной науки.

С глубокой благодарностью мы вспоминаем сотрудников редакции: В.Н.Березина, В.Н.Боровишки, И.Н.Бронштейна, М.Н.Данилычеву, С.А.Дориченко, Л.В.Кардасевич, А.И.Климанова, И.Н.Клумову, В.А.Лешковцева, Л.Г.Макар-Лиманова, Т.М.Макарову, Л.А.Панюшкину, Т.С.Петрову, М.Л.Смолянского, Л.В.Чернову, Ю.А.Шихановича и многих других.

Хочется вспомнить, что среди тех, кто оформлял журнал, были замечательные художники с мировым именем: Ю.А.Ващенко, М.М.Златковский, Д.А.Крымов, Э.В.Назаров, Л.А.Тишков, П.И.Чернуский.

Но и сегодняшний состав редколлегии и редакции содержит имена тех, кто прошел вместе с «Квантом» значительную часть 50-летнего пути, что обеспечивает необходимую преемственность и сохранение лучших традиций. Назовем наших «ветеранов» (в кавычках – потому что они еще и сейчас молодые духом, энергичные люди). В создании журнала и подготовке его первых номеров участвовали Ю.М.Брук, Н.Х.Розов, большую часть пути с журналом А.А.Варламов (живя и работая 30 лет в Италии, он остается активным членом редколлегии и автором журнала), С.Д.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, В.Н.Дубровский, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, Е.В.Морозова, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.А.Тихомирова.

Свой полувековой юбилей журнал встречает в принципиально новых условиях. Бумажный тираж «Кванта», впрочем как и других журналов, заметно упал. В то же время электронная версия каждого номера «Кванта» размещается в интернете.

Мы уверены, что у «Кванта» есть уникальный потенциал, достаточный для того, чтобы способствовать повышению уровня физико-математического образования и общенаучной культуры в нашей стране.

Редакционная коллегия журнала «Квант»

Рассказ о кванте

Я.СМОРОДИНСКИЙ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ РЕЧЬ ИДЕТ ОБ ОЧЕНЬ сложном и вместе с тем фундаментальном понятии, играющем огромную роль в современной физике. Именно поэтому статья несколько трудна для понимания. Но не рассказать в первом номере журнала о кванте как физическом понятии мы не могли, так как наш журнал называется «Квант».

Две самые короткие формулы современной физики

Современная квантовая физика родилась 14 декабря 1900 года. В этот день на заседании Берлинского физического общества выступил с докладом Макс Планк. В его докладе впервые появилась новая мировая постоянная, обозначенная буквой h и названная элементарным квантом действия. Элементарным она была названа потому, что определяла самую малую энергию, которую может нести с собой электромагнитное излучение.

Слово «квант» происходит от латинского слова quantum, означающего «столько» (например, quantum placet означает «столько, сколько хочется»), h называют теперь постоянной Планка, и ее наиболее точное значение равно

$$h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с (система СИ)}$$

$$\text{или } h = 6{,}6262 \cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с (система СГС)}.$$

Вместо h физики чаще пользуются другой величиной, которая в 2π раз меньше. Ее также называют постоянной Планка и обозначают

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar = 1{,}05459 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}.$$

Формула Планка записывается так:

$$E = h\nu\,.$$

Здесь E – наименьшая порция света (или радиоволн, или рентгеновских лучей, или любого другого электромагнитного излучения), которую может испустить или поглотить атом, молекула или кристалл при заданной частоте излучения ν. Для видимого света частота определяет «цвет» света. Синему цвету соответствует бóльшая частота, красному – меньшая. Частота колебаний излучения связана с длиной волны λ соотношением

$$\nu = \frac{c}{\lambda}\,,$$

где c – скорость света, которая в пустоте равна $3 \cdot 10^8$ м/с (точнее 299792,5 км/с). Таким образом, постоянная Планка связывает наименьшую энергию излучения с его частотой, показывая, что отношение E к ν есть всегда величина постоянная.

Формула Планка вместе с формулой Эйнштейна $E = mc^2$, связывающей массу и энергию, – две самые короткие и самые знаменитые формулы современной физики. Попробуем понять, что привело Планка к необходимости квантовой гипотезы и почему формула Планка оказалась столь важной.

С чего все началось?

Если пропустить свет через призму, то на экране, поставленном за ней, возникнет разноцветный спектр. (Его впервые наблюдал Ньютон.) Позже узнали, что спектр дает не только солнечный свет, но и излучение от любого нагретого тела. Чем выше температура тела, тем больше в спектре синих лучей. Не очень нагретое тело (градусов до 500 по шкале Цельсия) – красного цвета, сильно нагретое (градусов до 1000) – белого. Постепенно перед исследователями встали два вопроса: как зависит спектр тела от его температуры и как распределяется энергия вдоль спектра?

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1970 год.

Если к разным местам спектра приложить термометры, то можно измерить, какая доля энергии приходится на каждый участок спектра. Еще лучше взять не термометры, а прямо калориметры. Измеренные количества теплоты, которые падают, скажем, на полоску спектра шириной в 1 см, и будут теми величинами, которые нам нужны. Геометрическая длина спектра зависит от расстояния до экрана, поэтому обычно измеряют энергию, упавшую не на 1 см, а на участок спектра, соответствующий определенной частоте излучения ν или определенной длине волны λ.

Отношение величины энергии, сосредоточенной в узкой полоске спектра на участке частот в промежутке от ν до $\nu + \Delta\nu$, к величине $\Delta\nu$ называют спектральной плотностью энергии или просто спектральной функцией и обозначают $f(\nu)$.

Какой вид имеет спектральная функция $f(\nu)$? Ясно, что она зависит от температуры тела. Вообще говоря, $f(\nu)$ разная и у разных тел. Как же определить вид спектральной функции? Это была трудная задача, и чтобы рассказать о том, как она решалась, придется начать издалека. Но сначала – еще несколько слов о спектральной функции.

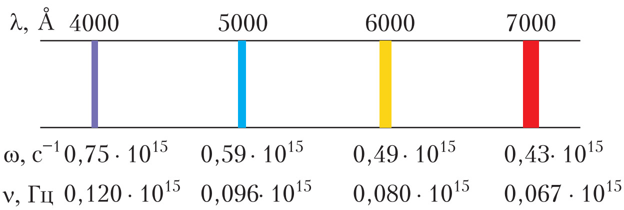


Схема спектра видимого света. Слева фиолетовый конец спектра, справа красный. Наверху длины волн в ангстремах, внизу частоты в обратных секундах. Количества энергии, падающие на выделенные четыре полоски спектра, относятся, как значения спектральной функции – $f\left(0{,}120 \cdot 10^{15}\right) : f\left(0{,}096 \cdot 10^{15}\right) : f\left(0{,}080 \cdot 10^{15}\right) : f\left(0{,}067 \cdot 10^{15}\right)$

Спектральная функция

Спектральная функция $f(\nu)$ – это, вероятно, самое трудное, что нужно понять в этой статье. Спектр, который мы видим на экране, тянется непрерывной полоской, и в нем представлены все частоты. Не имеет смысла спрашивать, какую энергию можно сопоставить в спектре точно данной частоте ν. Когда из источника течет вода, нельзя спросить, сколько воды вытечет в какой-то определенный момент времени, например ровно в 12 часов дня. Точно в этот момент вытекает объем воды, равный нулю. Для того чтобы вытекло какое-то количество воды, надо, чтобы прошел хотя бы небольшой промежуток времени. Можно спросить, сколько воды вытечет за время от 12.00 до 12.01. Можно спросить, сколько вытечет воды за любой интервал времени Δt от 12 часов до 12 часов + Δt минут. Если вода течет более или менее равномерно и за 1 минуту вытекает g см^3 воды, то за время Δt вытечет $g(t)\,\Delta t$ см^3.

Мы написали не g, а $g(t)$, так как в разное время (в час дня, в два часа дня и т.д.) вода может течь по-разному. Это, например, означает, что количество воды, вытекающее за 1 минуту в 12.15 дня, и количество воды, вытекающее за 1 минуту в 12.30, относятся как $g(15) : g(30)$, если за начало отсчета времени взять полдень – 12.00.

При подсчете количества воды мы сталкиваемся с новой величиной, которая описывает интенсивность непрерывного процесса, g есть отношение количества воды, вытекающего за интервал времени Δt, к этому интервалу, когда он взят очень маленьким.

Спектральная функция имеет аналогичный смысл; она определяет отношение количества энергии в полоске спектра к ширине этой полоски, когда ширина полоски взята очень маленькой. Ширина при этом измеряется, как было уже сказано, не в длинах волн, а в частотах.

Частицы или волны?

С самого начала механика встречалась с задачами, которые можно было разбить на два совершенно разных класса. Движение материальных точек и твердых тел описывалось уравнениями Ньютона. Из этих уравнений можно было определять траектории движения тел, например планет Солнечной системы, и описывать, как происходит движение вдоль траекторий. Но были и другие объекты. Движение воды в каналах, распространение звука в воздухе, изгиб железной балки – все эти задачи относились к механике сплошных сред, и ими занимались гидродинамика, аэродинамика, теория упругости и другие разделы механики.

Сплошная среда и система материальных точек представлялись совершенно разными физическими объектами. Если, решая задачу о течении воды, и выделяли мысленно небольшой объем жидкости, то этот объем никак не связывали с молекулами жидкости (о молекулах вообще узнали через много лет после того, как были написаны уравнения гидродинамики).

Волны в воде или в воздухе (например, те, которые называют звуком) и планеты, движущиеся вокруг Солнца, имели, казалось, мало общего. Все было ясно, вот только в оптике оставался нерешенным вопрос: что такое свет? Поток мельчайших частиц, как это думал Ньютон – сторонник корпускулярной теории, или это волны в какой-то среде, мировом эфире, как думал Гюйгенс – создатель волновой оптики? Популярность каждой из теорий в разное время была различной, но никто не мог найти решающего аргумента в пользу одной из них: свет в одних явлениях вел себя, как поток корпускул, в других – как волны. Сейчас мы хорошо знаем, что в этом нет противоречия – поверить в это стало возможным лишь благодаря квантовой теории. В прошлом же веке противоречие казалось неразрешимым. Свет должен был быть либо волной, либо частицей. Это утверждение выглядело логически безупречным.

Степень свободы

Разница между системой материальных частиц и сплошной средой выступает очень четко, если посмотреть, каким числом координат задается состояние системы.

Положение каждой точки в пространстве задается тремя числами – тремя координатами. Говорят, что материальная точка имеет три степени свободы. Если в систему входит N материальных точек, то говорят, что она имеет $3N$ степеней свободы.

Такое же рассуждение можно провести и для скоростей. Скорость одной точки описывается тремя числами – тремя компонентами вектора скорости. Скорости N точек требуют для своего описания $3N$ чисел.

Сколько чисел надо задать, чтобы описать состояние поверхности моря? Строго говоря, для каждой точки поверхности надо задать три числа – вектор скорости воды в данной точке; следовательно, чисел будет бесконечно много. Поверхность моря представляется нам как система с бесконечно большим числом степеней свободы. Даже тот факт, что вода состоит из молекул, а потому число степеней свободы можно определить, сосчитав молекулы, не облегчает задачу: молекул настолько много, что практически число степеней свободы остается бесконечно большим. В действительности же нас не интересует движение каждой молекулы. Когда по морю бегут волны, например от идущего корабля, то мы можем описать картину распределения волн, используя сравнительно немного чисел. Мы можем задавать величину амплитуды и фазы каждой волны; волн хотя и много, но все же меньше, чем молекул. Кроме того, картина, в основном, повторяется со временем: волны более или менее одинаковые.

В каждой волне движется много молекул, движение носит коллективный характер, и мы можем говорить о коллективных степенях свободы на поверхности моря, в отличие от индивидуальных степеней свободы, скажем, отдельной молекулы воды.

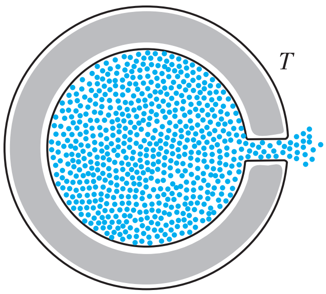
Такое же коллективное описание можно использовать, рассказывая о свойствах света. В частности, мы так и делаем, когда пытаемся описать распределение энергии по спектру.

Свет – волновой процесс, и его описание проще всего выглядит с позиций волновой теории. Конечно, подобное описание света совсем непохоже на описание системы точек. Здесь нет даже намека на какие-то степени свободы – волны и частицы совершенно непохожи друг на друга. Но это все-таки не совсем так. У волн и частиц есть общие свойства. Это, прежде всего, те, которые проявляются, когда мы начинаем изучать тепловые явления и думать, как распределяется между волнами и частицами тепловая энергия.

Температура и теплоемкость

Рассмотрим газ, находящийся в нагретом сосуде. Мы знаем, что температура газа и стенок сосуда должна быть одинаковой. Если это вначале было не так, то тепло будет до тех пор перетекать от более теплого тела к более холодному, пока температуры не станут равными, т.е. пока не установится тепловое равновесие между стенками сосуда и находящимся в нем газом.

Температура газа связана с кинетической



Сосуд с газом. Атомы сталкиваются со стенками, и в результате устанавливается тепловое равновесие между газом и сосудом – газ приобретает температуру стенок. Число атомов при столкновениях не меняется. Чтобы измерить температуру газа, можно выпустить небольшую его порцию через маленькое отверстие

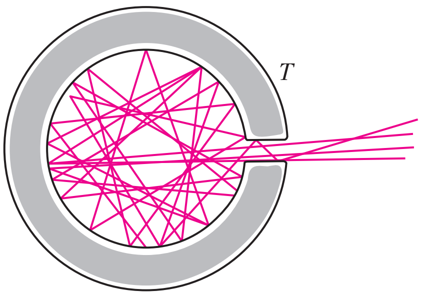
энергией его атомов (мы будем для простоты говорить об одноатомном газе). Один из самых первых выводов кинетической теории газа состоял в том, что каждый атом газа обладает энергией $\frac{3}{2}kT$, по $\frac{1}{2}kT$ на каждую степень свободы, а полная энергия газа равна $\frac{3}{2}NkT$, где N – число частиц в газе ($3N$ – полное число степеней свободы). Здесь k – постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К); она играет роль переводного коэффициента от градусов на шкале Кельвина к джоулям. Дальше в кинетической теории газов показывалось, что если есть колебания, то на каждую колебательную степень свободы приходится энергия kT, вдвое большая, чем на степень свободы, отвечающую поступательному движению. Эти утверждения, доказанные и проверенные, относились к газу. Естественно, возник вопрос: а что можно сказать об энергии излучения?

Представим себе, что у нас есть сосуд, как говорили раньше – «полость», в котором нет газа. Однако в таком сосуде всегда будет электромагнитное поле. Электромагнитные волны излучаются и поглощаются стенками, и эта энергия как-то будет распределена по спектру. Если стенки сосуда имеют какую-то фиксированную температуру, то распределение энергии будет, очевидно, различным при разных температурах. Мы можем изучить поле внутри сосуда, сделав в нем маленькое отверстие и выпустив пучок света.

Когда впервые начали обсуждать свойства такой полости, то заметили, что если свет снаружи попадает в отверстие, то он, очень много раз отразившись от стенок и «заблудившись», почти не будет иметь шансов выйти наружу. Отверстие поглощает весь падающий на него свет, поэтому тело и назвали «черным», а свет, который выходит из отверстия, назвали «излучением черного тела» (так что «черное тело» светится!).

Представьте теперь, что «черное тело» нагревают. Тогда можно задать вопрос: какое количество тепловой энергии перейдет в свет? Ответ на него был дан в конце XIX века и состоял в том, что свет, заключенный внутри «черного тела», должен находиться в тепловом равновесии со стенками сосуда. Это равновесие устанавливается и поддерживается процессами излучения и поглощения световых волн нагретыми стенками (сколько излучают, столько же поглощают обратно), а количество энергии и ее спектральная плотность полностью определяются только одним параметром – температурой. Никакого разговора о числе степеней свободы (как это было в случае газа) здесь как будто и нет.

Если в сосуде, в котором установилось



Сосуд с излучением («черное тело»). Волны или лучи света много раз отражаются от стенок, при этом они поглощаются стенками и излучаются вновь; в результате устанавливается тепловое равновесие между излучением и стенками. Свет, выходящий из маленького отверстия в таком сосуде, будет иметь спектр «черного тела»

тепловое равновесие, есть маленькое отверстие, то световые волны будут выходить из него. Количество энергии, выходящее из отверстия «черного тела», определяется законом Стефана – Больцмана. Согласно этому закону количество энергии, излученное «черным телом» с единицы поверхности отверстия в единицу времени, пропорционально четвертой степени абсолютной температуры и не зависит от природы тела:

$$\varepsilon = \sigma T^4$$

($\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Дж$\big/\left(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4\right)$ – постоянная Стефана–Больцмана).

Закон Стефана–Больцмана был хорошо проверен экспериментально. Опыты подтвердили, что к излучению можно применять те же понятия энергии и температуры, которые используются при описании тепловых свойств газа в кинетической теории.

Формула Вина и формула Рэлея–Джинса

Теперь пора вернуться к вопросу, который был поставлен в начале статьи: как получить из теории спектральную функцию, которая описывает распределение энергии излучения по спектру, и как она зависит от температуры?

Прежде всего этот вопрос попробовали решить по аналогии, но аналогия с газом не помогла. Число степеней свободы светового потока, как их ни считай, бесконечно велико, и если на каждую степень свободы выделить по одинаковой порции энергии, скажем по kT (световым волнам разумно сопоставить колебательные степени), то общая энергия будет бесконечной при любой конечной температуре. Рассуждение «по аналогии» приводит нас к абсурдному выводу, что вся тепловая энергия стенок (а за ними и всего остального) должна перейти в электромагнитные волны, так что температура всех предметов должна стремиться к абсолютному нулю. Если бы это было так, то любой предмет в комнате излучал бы свет (видимый или невидимый). Но мы знаем, что этого не случается.

Точные физические измерения говорят, что при каждой температуре тело излучает волны в сравнительно узком интервале спектра. Максимальная энергия излучения сосредоточена вблизи длины волны, которая определяется так называемым законом Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}.$$

Этот закон был открыт в 1893 году. Постоянная Вина $b = 0{,}29 \cdot 10^{-2}$ м · К была определена из опыта, но ее происхождение оставалось неясным. Мы увидим дальше, что она связана с постоянной Планка (так же, как и постоянная Стефана–Больцмана).

Закон Вина показывает, что с нагреванием тела максимум спектра смещается в сторону меньших длин волн, т.е. в сторону бо́льших частот (этот закон часто так и называют законом смещения).

Итак, закон Стефана–Больцмана говорит о полной энергии излучения, а закон Вина – о положении максимума в спектре. Другими словами, известно, где спектральная кривая имеет максимум и какова площадь под кривой. Настала очередь обсудить более подробно форму этой кривой.

К началу XX века существовали две формулы, с помощью которых пытались описать форму кривой распределения энергии по спектру. Одну из них предложили два англичанина – это формула Рэлея–Джинса [1]

$$f(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT .$$

Сравнение с опытом показало, что формула Рэлея–Джинса правильно описывает спектр только для самых малых частот (слева от максимума кривой).

Если посмотреть на эту формулу с точки зрения числа степеней свободы, то можно дать ей красивое объяснение. Формула Рэлея–Джинса имеет такой вид, как будто участок спектра $\Delta\nu$ содержит $8\pi\nu^2/c^3$ степеней свободы, на каждую из которых приходится тепловая энергия kT. Однако эта эффектная интерпретация порочна. Число степеней свободы быстро растет, если переходить ко все большим частотам в ультрафиолетовую часть спектра (направо от максимума кривой). Это значит, что чем больше частота, тем больше энергии содержит спектр, т.е. и по этой формуле все тела должны излучать электромагнитные волны с бесконечно большой частотой.

Этот странный вывод носил драматическое название «ультрафиолетовой катастрофы», так как демонстрировал полный провал попыток объяснить свойства спектра, оставаясь в рамках понятий классической физики.

Другую формулу предложил уже известный нам Вин в 1890 году:

$$f(\nu) = A\nu^3 e^{-\frac{a\nu}{T}} .$$

(Правда, он писал эту формулу несколько иначе, выражая частоту через длину волны.) В формуле Вина A и a – некоторые постоянные, связанные, как мы это увидим в дальнейшем, с постоянной Планка. Формула Вина описывала ультрафиолетовую часть спектра, но была беспомощна, когда речь заходила о длинноволновой его части.

Итак, перед работами Планка физики знали уже довольно много: площадь под кривой распределения энергии по спектру, положение максимума и форму кривой в «начале» и в «конце». Оставалось сделать последний смелый шаг. Он-то и привел к рождению новой физики.

Формула Планка

Сейчас трудно восстанавливать ход мыслей физиков, живших много лет тому назад. По-видимому, Планк просто искал какую-нибудь формулу, которая объединила бы вместе все, что было известно о спектре «черного тела». Пробуя разные подходы, он в конце концов пришел к выводу, что надо рассматривать свойства атомов, из которых состоит стенка и которые излучают свет. Гипотеза Планка состояла в том, что излучающие атомы могут иметь не любую энергию, а только энергию, равную целому числу $h\nu$, где ν – частота колебаний атома. Отсюда уже получилось, что атом может излучать свет только квантами (хотя эту связь фактически поняли несколько позже).

Планк записал свою формулу так:

$$f(\nu) = n(\nu) \cdot h\nu ,$$

где $n(\nu)$ – это число квантов, равное $\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}\dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$, а $h\nu$ – энергия кванта. Последняя формула может показаться не совсем точной, так как из нее $n(\nu)$ получается не целым. В этом ничего страшного нет, так как формула дает среднее число квантов. Например, если в каком-то объе-

[1] Рэлей дал ее первым в 1900 году. Джинс вывел формулу немного позже.

ме половину времени есть один квант, а половину времени квантов нет совсем, то среднее число квантов равно $1/2$.

Формула Планка отличается от формулы Рэлея–Джинса тем, что ее нельзя объяснить с точки зрения степеней свободы. Если считать, что каждый квант имеет три степени свободы, то число степеней свободы системы, равное $3n(\nu)$, оказывается функцией температуры: число степеней свободы растет с повышением температуры. Вывод абсурдный с точки зрения старых представлений о свойствах частиц. Но именно в этом нарушении привычной логики и лежал выход из тупика. Ведь количество излучающих частиц может и не быть строго определенным числом; оно может изменяться с изменением условий. Это особенно стало ясно, когда было открыто рождение пар: электрон – позитрон, протон – антипротон и т.д.

В тот вечер, когда Планк делал свой доклад, никто не думал о рождении новой физики. На формулу посмотрели с практической стороны и сразу же (в ночь после доклада) сравнили график, даваемый новой формулой, с кривыми, полученными из опыта. Оказалось, что формула Планка хорошо описывает весь спектр.

Для той части спектра, где ν велико, можно вычеркнуть единицу в знаменателе формулы, по которой вычисляется число квантов $n(\nu)$ – эта единица мала по сравнению с первым членом. Тогда формула Планка превратится в формулу Вина. Из сопоставления двух выражений можно заключить, что коэффициенты в формуле Вина равны

$$A = \frac{8\pi h}{c^3} \text{ и } a = \frac{h}{k}.$$

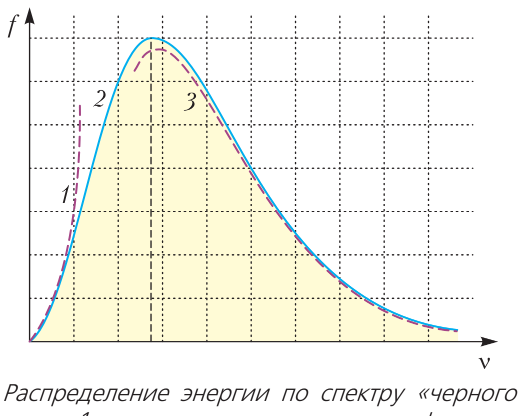
Планк, сравнивая свою формулу с формулой Вина, определил первое значение постоянной h. Он получил, что $h = 6{,}55 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Даже удивительно, как мало отличается значение h, вычисленное Планком, от современного, которое приведено выше.

При малых значениях ν в формуле Планка можно произвести следующую замену:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} \quad \left(\text{если } \frac{h\nu}{kT} \ll 1\right).$$

Тогда получится в точности формула Рэлея–Джинса. Используя формулу Планка, можно получить и закон Стефана–Больцмана. Постоянная этого закона σ выражается через h формулой

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15c^2}\frac{k^4}{h^3}.$$



Распределение энергии по спектру «черного тела»: 1 – кривая, соответствующая формуле Рэлея–Джинса; 2 – графическое изображение формулы Планка; 3 – кривая, которую дает формула Вина

Явление фотоэффекта

В рассуждениях Планка квант сам по себе не появлялся – речь шла о системах, состоящих из большого числа квантов, для излучения которых применялись методы статистики. Но еще в 1887 году Герцем было открыто явление (изученное подробно Столетовым), в котором квантовые свойства света проявлялись очень четко. Речь идет о фотоэффекте – вылете электронов из куска металла при освещении его светом. На этом эффекте построены многие приборы: телевизор, осциллограф, фотоэкспонометр и т.д.

Фотоэффект обнаруживает закономерность, которая выглядела парадоксальной для физики прошлого века. Энергия электронов, которые вырываются из металла, не зависит от интенсивности света. Если увеличивать интенсивность света, то возрастает число вырванных электронов, энергия же их остается неизменной. Для того чтобы увеличить энергию вылетающих электронов, необходимо увеличить частоту падающего света. Такое поведение совсем непохоже, например, на то, как вылетают электроны из катода радиолампы – чем выше температура катода, тем больше энергия вылетающих электронов. Этот эффект называют термоэмиссией. В нем не замечали ничего парадоксального. А фотоэффект был непонятен.

Сейчас мы знаем, что электрон не может постепенно поглощать и накапливать энергию, как это думали раньше, а может поглощать ее только квантами. Энергия же кванта определяется частотой. Отсюда следовало объяснение фотоэффекта, которое дал Эйнштейн в 1905 году. Все детали теории стали ясны много позднее, когда была создана квантовая теория металлов.

В начале XX века было хорошо известно, что, для того чтобы вырвать электрон из металла, надо затратить определенную энергию; она называется работой выхода. Так, для вольфрама эта работа равна примерно 4,6 электронвольта ($1\ эВ = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж), для цезия – около 2 эВ, для платины – около 6 эВ. Остальные металлы имеют промежуточные значения работы выхода. Рассуждения Эйнштейна сводились к следующему. Если частота света такова, что энергия кванта $h\nu$ меньше работы выхода A, то электрон вообще не может быть вырван из металла. Если же энергия кванта больше A, то избыток энергии уходит на кинетическую энергию электрона W. Сказанное можно записать в виде формулы, которая носит имя Эйнштейна:

$$W = h\nu - A\,.$$

После фотоэффекта квантовый характер поглощения и излучения был открыт в очень многих явлениях. В наиболее общем виде он сформулирован в известном соотношении Нильса Бора: $h\nu = E_{\mathrm{II}} - E_{\mathrm{I}}$. Смысл его состоит в том, что если излучающая система переходит из состояния с энергией E_{II} в состояние с энергией E_{I}, то она излучает квант с энергией $h\nu$. Естественно, что если система, находясь в состоянии с энергией E_{I}, поглотит квант $h\nu$, то она перейдет из состояния E_{I} в состояние E_{II}.

Второе открытие кванта

Открытие Планка состояло в том, что он постулировал дискретный (квантовый) характер излучения и поглощения. Однако сам Планк не высказал никаких соображений о том, как же ведет себя испущенное излучение. Лишь Эйнштейн (в упомянутой выше работе о фотоэффекте) доказал, что из гипотезы Планка и теории относительности следует реальное существование кванта, т.е. что свет не только поглощается или излучается квантами, но что он сам состоит из квантов.

Излучая квант, тело теряет свою энергию, которая передается свету. Значит, свет, согласно теории относительности, уносит и массу тела.

Массу кванта можно получить, скомбинировав две формулы: $E = h\nu$ и $E = mc^2$. Из них

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Лучше говорить, как это принято, что квант имеет импульс $p = mc$, т.е.

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Импульс, конечно, вектор: он направлен туда, куда летит квант. Энергия кванта связана с его импульсом соотношением

$$E = cp.$$

Таким соотношением описываются частицы, у которых равна нулю масса покоя. Если масса покоя $m_0 \neq 0$, то энергия и импульс частицы связаны в теории относительности формулой

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}\,.$$

Благодаря Эйнштейну квант стал в один ряд с частицами; только он не имеет массы покоя, а потому обречен всегда летать со скоростью света.

Комптон-эффект

Во всем предыдущем оставался еще один пункт, не проверенный опытом. Если квант обладает и энергией и импульсом, то выполняются ли для него законы сохранения энергии и импульса так же, как для других частиц? И хотя в положительном ответе на этот вопрос никто не сомневался, все же прямая экспериментальная проверка законов сохранения была бы очень полезной.

Такая проверка была осуществлена в 1925 году Артуром Комптоном, который изучал, как рассеиваются кванты света, когда они падают на покоящийся электрон. Комптон обнаружил, во-первых, что электрон испытывает отдачу, т.е. электрон получает от кванта импульс, а во-вторых, что квант теряет энергию и его частота уменьшается. Качественно картина была похожей на столкновение частиц. Но Комптон показал и больше – что энергия и импульс электрона и кванта в конце соударения как раз такие, какие получаются из уравнений, описывающих законы сохранения.

Заключение

Таким образом, начав с изучения световых волн, физики постепенно пришли к механике квантов, очень напоминающей механику Ньютона, только с теми обобщениями, которые принесла с собой теория относительности.

Рождение новой науки всегда происходило так, что в ней причудливо переплетались разные, в прошлом далеко стоящие друг от друга факты и выявлялись связи, не замечаемые ранее. Термодинамика, кинетическая теория газов, электродинамика, оптика и, наконец, теория относительности – вот тот фундамент, на котором из формулы Планка выросло здание современной физики.

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Как дерево спасает от дождя

...кажется, дождик собирается, кажется, дождик собирается...

А.Милн

Зададимся чрезвычайно простым вопросом: каким образом дерево укрывает от дождя? Конечно, о пальме, листом которой можно укрыть стадо слонов, речь не идет. Но ведь от дождя можно спрятаться и под елью, и под березой. Что же происходит при этом?

Не спешите с ответом, который напрашивается сам собой, – что капли задерживаются на листьях. Ведь больше двух-трех капелек на листе не удержится. Не думайте, что капли испаряются с листьев во время дождя, – влажность столь велика при дожде, что даже выстиранное белье не сохнет.

Как же маленькие листья, а тем более еловые или сосновые иглы, спасают от дождя? Или мы обманули себя, спрятавшись под дерево, когда «...разыгралась непогода: молния так и сверкала, а дождь лил как из ведра» (Г.Х.Андерсен)?

Как показывает житейский опыт, береза или ель – и не хуже, чем пальма – действительно спасает от дождя. И вот каким образом.

Капля, упав на лист (или иголку), съезжает, как по канатной дороге, на самую удаленную от ствола часть листа – острие. С острия капля срывается и... падает на следующий лист, расположенный ниже. В дождливую погоду в лесу можно услышать «...множество различных оттенков стука дождевых капель, падающих с листа на листок» (Марсель Эме), и увидеть, как «...бежала с чашечки на чашечку грозой одуренная влага» (Б.Пастернак).

Скатываясь с листа (иголки), капля удаляется от ствола на три-четыре сантиметра. А встретив на пути десять, двадцать листьев (игл), она будет отброшена на значительное расстояние. Как будто просто прокатилась по крыше.

Вот и все.

Е.Гурович

Опубликовано в «Кванте» №7 за 1991 год и «Кванте» №4 за 1992 год.

Кривые дракона

Н.ВАСИЛЬЕВ, В.ГУТЕНМАХЕР

Что такое кривая и ломаная дракона

Возьмите длинную полоску бумаги, сложите ее пополам и еще раз пополам. Сложенную полоску положите ребром на стол и разверните так, чтобы угол при каждом сгибе был равен 90° (рис.1). Если смотреть сверху, то видна ломаная линия, изображенная на рисунках 2,*а* или *б*.

При трех складываниях полоски пополам уже получаются существенно различные ломаные (рис.2,*в* или *г*) в зависимости от того, как складывается полоска. Если полоску складывать четыре раза и больше, а затем разворачивать ее сгибы до прямых углов, можно получить много различных ломаных. На рисунке 3 показана одна из ломаных, получающихся при пяти складываниях пополам.

Практически вам не удастся сложить полоску бумаги больше семи раз – ведь уже при восьмом складывании получилось бы $2^8 = 256$ слоев! Однако мы скоро научимся рисовать довольно длинные такие ломаные, обходясь без полоски. На рисунке 4 изображена одна из ломаных, которая получилась бы, если бы мы складывали полоску 12 раз. Она состоит из $2^{12} = 4096$ звеньев.

Легко убедиться в том, что если складывать полоску более трех раз, то после разворачивания некоторые ее углы обязательно будут «касаться» друг друга (рис.2,*г* и рис.3). Из-за многочисленных таких касаний на длинных ломаных местами получается сетка. Чтобы разобраться, как идет ломаная, можно закруглить у нее углы (так, как показано на рисунке 3 цветной линией). Если проделать это для ломаной, изображенной на рисунке 4, то получится замысловатая линия. Этот рисунок и подсказал американскому физику Джону Хейвею (Heighway) название «*кривые дракона*». Тот, кто когда-нибудь видел дракона, мог бы подтвердить, что он выглядит именно так.

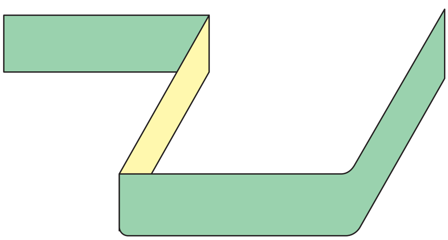


Рис. 1

Как рисовать длинные ломаные дракона?

Мы будем называть любую ломаную, полученную из бумажки, сложенной по-

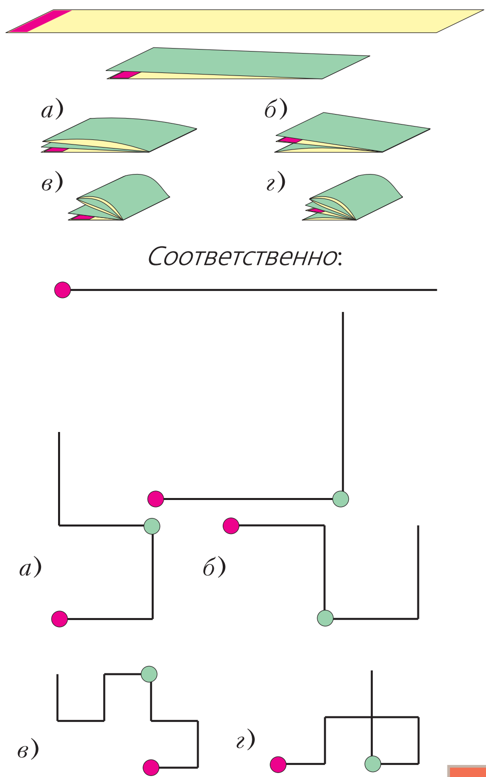


Рис. 2

Опубликовано в «Кванте» № 2 за 1970 год.

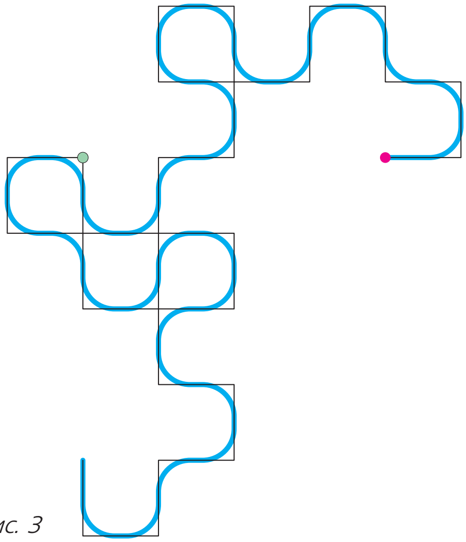


Рис. 3

полам n раз, разворачиванием сгибов до 90°, *ломаной дракона ранга n*. Выясним, как устроены ломаные дракона и как их рисовать для достаточно больших n.

Первый способ. Ломаная дракона ранга n состоит из 2^n звеньев и соответственно имеет $2^n - 1$ вершин (не считая концов). Таким образом, у нее есть средняя вершина (при $n > 0$), поскольку число вершин нечетно. На рисунках 2 и 3 у каждой ломаной средняя вершина отмечена зеленым кружочком. Можно подметить, что каждая из этих ломаных состоит из двух одинаковых кусков, получающихся друг из друга поворотом на 90°. Оказывается, это общая закономерность.

Теорема 1. *Если продолжить любую ломаную дракона ранга n с концом в точке O точно такой же ломаной, полу-*

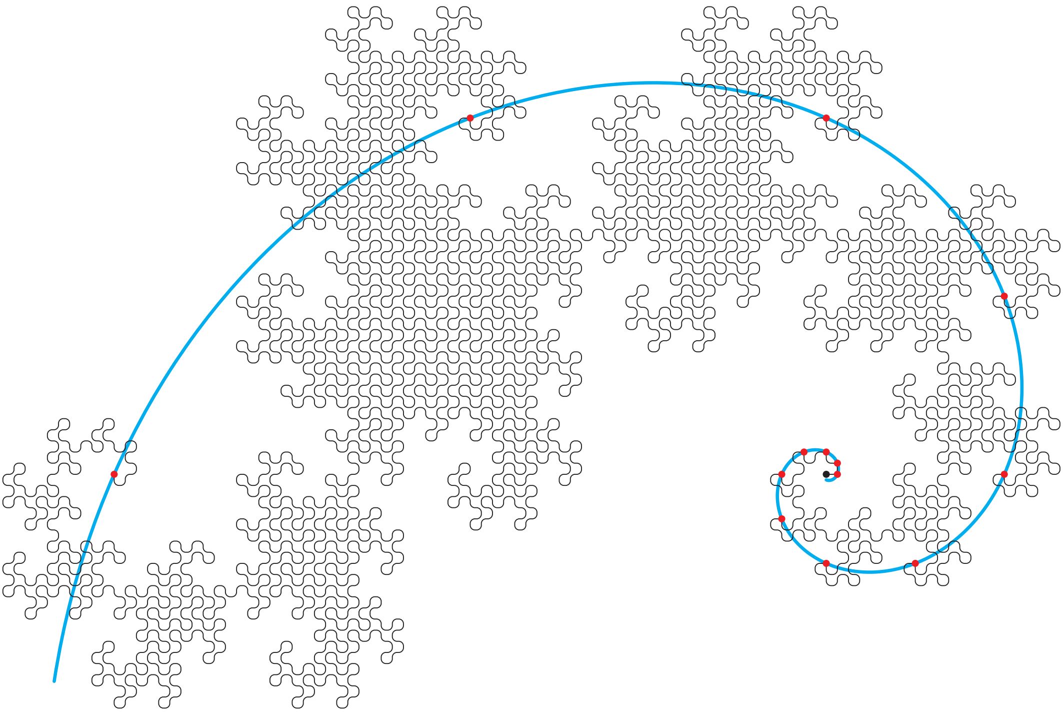


Рис. 4. Такая ломаная («Главная ломаная дракона») получается, если, начиная с отрезка, каждый раз поворачивать предыдущую ломаную в одну и ту же сторону. На рисунке 3 изображено начало этой ломаной (32 звена), на этом рисунке – 4096 звеньев. Если ломаную продолжать таким же образом дальше, то она будет медленно обходить вокруг своего начала, делая один полный оборот за 8 «удвоений». Красные точки лежат на логарифмической спирали. Для тех, кто знаком с полярной системой координат, мы можем написать ее уравнение: $\varphi = \log_a r$, *где* r, φ – *полярные координаты,* $a = 2^{2/\pi}$

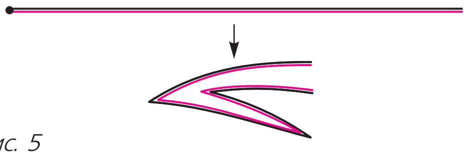


Рис. 5

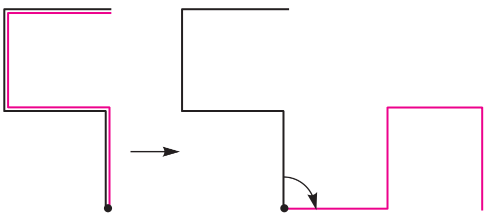


Рис. 6

ченной из данной поворотом на 90° вокруг точки О, то получится ломаная дракона ранга $n + 1$, и обратно, любая ломаная дракона ранга $n + 1$ получается из некоторой ломаной ранга n этим способом.

В самом деле, допустим, мы хотим сложить полоску $n + 1$ раз пополам. Сложим ее сначала один раз пополам. Тогда две ее половинки совпадут и при дальнейших складываниях будут сгибаться пополам совершенно одинаково (рис.5). Теперь развернем на 90° последние n сгибов полоски. Получим две совпадающие ломаные дракона ранга n; остается развести их на 90° – и мы получим ломаную дракона ранга $n + 1$ (рис.6). Подумайте, как из этих соображений вывести оба утверждения теоремы 1.

Пользуясь теоремой 1, легко рисовать длинные ломаные дракона.

Поскольку любая ломаная дракона идет по линиям квадратной сетки, ее удобно рисовать на клетчатой бумаге.

Возьмем любую короткую ломаную дракона (например, просто отрезок). Условимся, что одна из ее крайних точек – начало, а другая – конец. Продолжим ее такой же ломаной, повернутой относительно ее конца на 90° по (или против) часовой стрелке. Полученную новую ломаную таким же способом продолжаем от конца; так проделываем столько раз, сколько захочется и сколько сможем. Это автоматически и быстро можно делать, если под рукой есть калька или, еще лучше, слегка прозрачная клетчатая бумага. (Подумайте, как!)

Очевидно, точно так же мы можем сразу рисовать и кривые дракона: нужно только каждый раз закруглять средний сгиб.

Замечательное свойство всех кривых дракона заключается в том, что *они сами себя не пересекают, или, что то же самое, ломаные дракона никогда не проходят по одному и тому же отрезку дважды*. Таким образом, хотя ломаная дракона может дважды проходить через одну и ту же точку (вершину сетки), но более двух раз она в одну и ту же точку не попадает.

Из теоремы 1 сразу не видно, как доказать, что ломаные дракона не проходят дважды по одному и тому же отрезку, – наоборот, чем более длинные и запутанные ломаные или кривые рисуешь, тем более удивительно, как удачно их «выступы» и «впадины» подходят друг к другу (см. кривую дракона «Паровоз» на рисунке 15).

Однако нетрудно это доказать (см. задачу 9), используя другую теорему об «удвоении» ломаных дракона, которая, кстати, дает еще один способ рисовать длинные ломаные.

Второй способ. На рисунке 7 вершины черных ломаных дракона соединены красными отрезками через одну. Мы видим, что красные отрезки снова составляют ломаные дракона. Оказывается, это тоже общая закономерность.

Чтобы точно ее сформулировать, заметим еще, что каждый красный отрезок является гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого – звенья исходной ломаной (на рисунке треугольники слегка закрашены), причем каждые два соседних таких треугольника получаются друг из друга поворотом на 90° вокруг их общей вершины; другими словами, если идти вдоль крас-

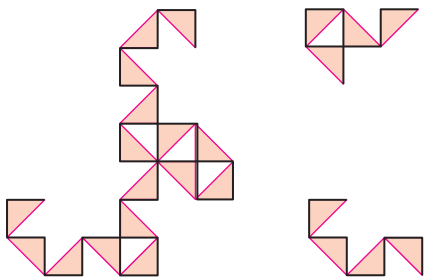


Рис. 7

ной ломаной дракона, то эти треугольники будут встречаться поочередно то справа, то слева.

Теорема 2. *Если на каждом звене ломаной дракона ранга n, как на гипотенузе, построить прямоугольный равнобедренный треугольник, причем так, чтобы для двух соседних звеньев эти треугольники получались один из другого поворотом на* 90° *относительно общей вершины, то катеты построенных треугольников составляют ломаную дракона ранга* $n+1$. *И наоборот, каждую ломаную ранга* $n+1$ *можно получить этим способом из некоторой ломаной ранга n.*

В самом деле, проследим за последним складыванием полоски пополам. Для удобства мы будем ссылаться на условный рисунок 8. Мы хотим сложить полоску пополам $n+1$ раз. Сложим ее сначала n раз и посмотрим на нее в профиль (красная линия). Затем сложим ее еще раз пополам и развернем этот последний сгиб на 90° (черная линия). Теперь бумажка идет от сгибов A к сгибам B и обратно не по гипотенузе, а по катетам равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Развернем теперь все остальные сгибы до 90° (на рисунке 9 показано, как разворачивается отдельный сгиб). Тогда катеты прямоугольных треугольников образуют ломаную дракона ранга $n+1$, а гипотенузы – ранга n.

Пользуясь этими соображениями, легко доказать оба утверждения теоремы 2. Вы можете попробовать дать другое доказательство: вывести теорему 2 из теоремы 1.

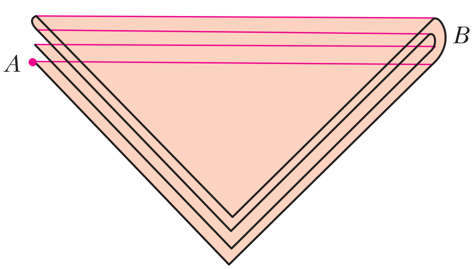


Рис. 8

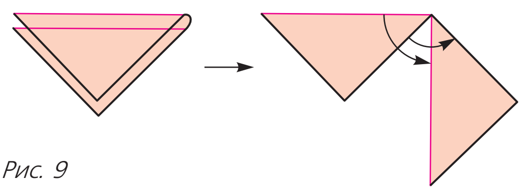


Рис. 9

С помощью теоремы 2 из каждой ломаной дракона ранга n можно получить две разные ломаные ранга $n+1$: все зависит от того, по какую сторону от первого звена достроить треугольник.

Обратите внимание на то, что когда мы переходим от ломаной ранга n к ломаной ранга $n+1$ по теореме 1, то ломаная получается вдвое длиннее, а длина каждого звена не меняется; если же мы пользуемся для «удвоения» теоремой 2, то длина ломаной увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а длина звена уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Потренируйтесь теперь в рисовании ломаных дракона с помощью теоремы 2.

Слова

Свойство, о котором идет речь в теореме 2, можно объяснить совсем просто, если посмотреть на ломаные дракона (или, если угодно, на способы складывания бумажки) несколько с иной точки зрения.

Пусть по ломаной дракона ползет черепаха (рис.10). Каждый раз, когда она доползает до вершины, ей приходится поворачивать на 90° налево или направо. С точки зрения черепахи, ее путь будет определяться последовательностью поворотов. Например, для ломаной на рисунке 2,*а* (начало в красной точке) эта последовательность будет выглядеть так: налево, налево, направо.

Будем поворот направо обозначать буквой R (right), поворот налево – буквой L (left). Тогда вся ломаная запишется таким «словом»:

$$LLR$$

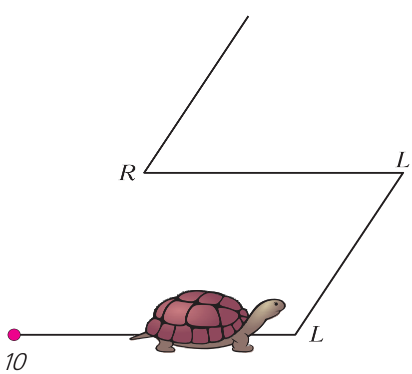


Рис. 10

(«словом» во многих разделах математики и логики называют просто любую последовательность букв). Точно так же можно записать словом из букв L и R любую ломаную дракона.

Чтобы получить из ломаной *а* ломаную *б* (см. рис.2), нужно бумажку сложить еще один раз «налево» (см. рис.2,*б* и 11). При этом между каждыми двумя вершинами ломаной *а* возникнет еще по одному повороту, причем на рисунке 11 хорошо видно, что эти новые повороты будут чередоваться; таким образом, получим

$$\begin{array}{c} L\ L\ R \\ L\ R\ L\ R \end{array} \to LLRLLRR,$$

т. е. слово, являющееся записью ломаной *в*. При еще одном сгибе налево мы получили бы ломаную, характеризуемую словом

$$\begin{array}{c} L\ L\ R\ L\ L\ R\ R \\ L\ R\ L\ R\ L\ R\ L\ R \end{array} \to LLRLLRRLLLRRLRR.$$

Начертите эту ломаную. Это – Главная ломаная дракона ранга 4. Если хотите, закруглите у нее углы, как это предложил Хейвей.

Если вы проделаете над последним полученным словом ту же операцию еще раз (снова начав последовательность чередующихся букв с L), то получите слово из 31 буквы – запись Главной ломаной дракона ранга 5, изображенной на рисунке 3.

Разумеется, последовательность чередующихся букв можно начинать не с L, а с R – при этом получатся другие ломаные.

Легко видеть, что наш способ изготовления слова для ломаной ранга $n+1$ из слова для ломаной ранга n в точности соответствует геометрическому способу удвоения, о котором идет речь в теореме 2 (новым буквам соответствуют достраиваемые треугольники). Вообще всю «теорию» ломаных дракона можно было бы строить не геометрически – с помощью поворотов, достраивания треугольников и т.п., а «алгебраически»– с помощью операций над словами из двух букв L и R, «записями» ломаных дракона.[1]

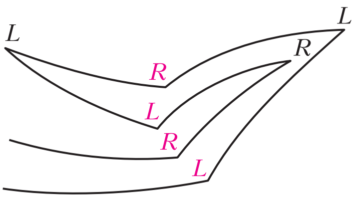


Рис. 11

Читатель сможет частично проделать этот путь и познакомиться с целым рядом интересных закономерностей, которыми обладают слова – записи кривых дракона, решая нижеследующие задачи.

Задачи

1. Какой длины надо взять полоску, чтобы, сложив ее пополам 30 раз, получить расстояние между соседними сгибами равным 1 см? Больше или меньше расстояния от Земли до Луны?

2. Как изменится ломаная дракона, если полоску бумаги положить на стол другим ребром? Как изменится при этом слово, записывающее ломаную?

3. а) Сколько существует различных (не подобных друг другу) ломаных дракона ранга 4? Нарисуйте их все. Напишите соответствующие им слова из букв L и R.

б) Сколько существует различных ломаных ранга n?

4. Допустим, что черепаха проползла по ломаной дракона и прочла слово из букв L и R. Какое слово она прочтет, если проползет по этой ломаной в обратном направлении?

5. Пусть s – некоторое слово из букв L и R. Обозначим через $\bar{s}$ слово, которое получится из s, если переставить в нем буквы в обратном порядке и потом поменять L на R и R на L. (Например, если $s = LLR$, то $\bar{s} = LRR$.)

Пусть s и t – некоторые слова из букв L и R. Будем обозначать через st слово, получающееся, если слова s и t написать рядом.

Докажите, что:

а) Для любых слов s и t

$$\overline{st} = \bar{t}\bar{s} .$$

б) Если s_{n+1} – слово, соответствующее ломаной дракона ранга $n + 1$, то

$$s_{n+1} = s_n x \bar{s}_n ,$$

[1] Именно такой способ изложения избрали математики Кнут и Дэвис, по рукописи которых «Number representations and dragon curves» (Ch.Davis, D.E.Knuth) авторы статьи впервые познакомились с кривыми дракона. Из этой рукописи заимствован и ряд рисунков длинных кривых дракона.

где s_n – некоторое слово, соответствующее ломаной дракона ранга n, а x – слово, состоящее из одной буквы.

в) Если s_n – слово, соответствующее ломаной дракона, то s_n отличается от $\overline{s}_n$ только одной средней буквой.

г) Слово, записывающее ломаную дракона ранга n, можно и притом единственным образом построить, если задать произвольно n букв, которые должны стоять в этом слове на местах с номерами 2^k, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; после этого, чтобы найти, какая буква стоит на m-м месте, нужно представить m в виде $m = 2^k(2l+1)$, где k и l целые; если l четно, то на m-м месте стоит та же буква, что и на 2^k-м, если l нечетно – противоположная.

д) Два слова s_n' и s_n'' задают одинаковые по форме (подобные) ломаные дракона в том и только в том случае, если после вычеркивания средней буквы эти слова либо совпадают, либо одно получается из другого заменой L на R и R на L. (Например, слова $LLRLLRR$, $LLRRLRR$, $RRLRRLL$, $RRLLRLL$ задают одинаковые ломаные.)

6. Пусть мы имеем ломаную дракона ранга n. Из нее можно получить две ломаные дракона ранга $n+1$, пользуясь либо теоремой 1 (принимая за точку O тот или другой конец ломаной), либо теоремой 2 (достраивая треугольники в ту или другую сторону). Будут ли в обоих случаях получаться те же самые две ломаные дракона ранга $n+1$ или, вообще говоря, другие? Как получать их слова из слова данной ломаной ранга n?

7. На плоскости даны две точки A и B. Начертим квадрат с центром в середине отрезка AB, одна из сторон которого равна $2AB$ и параллельна отрезку AB. Докажите, что любая ломаная дракона с концами в точках A и B лежит внутри этого квадрата. Докажите, что для любой точки M внутри этого квадрата и любого положительного числа ε можно найти такую ломаную дракона с концами A и B, которая проходит от точки M на расстоянии меньше ε (говоря математическим языком, «объединение всех ломаных дракона с концами в точках A и B всюду плотно в этом квадрате»).

8. Пусть черепаха ползет по плоскости из точки A с постоянной скоростью – вначале по направлению AB, а затем через каждые 15 минут поворачивает на 90°. Докажите, что вернуться в A черепаха может лишь через целое число часов и лишь по направлению, перпендикулярному к AB.

9. Докажите, что ломаная дракона никогда не проходит по одному и тому же отрезку более одного раза.

10. Докажите, что если ломаную дракона повернуть вокруг ее начала O на 90°, 180°, 270°, то из полученных четырех ломаных (включая исходную) никакие две не имеют общего отрезка.

11. Рассмотрим множество ломаных λ, обладающих такими свойствами: λ имеет 2^n звеньев равной длины, и если ее разбить на 2^k кусков по 2^{n-k} звеньев в каждом куске, то два соседних куска получаются один из другого поворотом вокруг общей вершины на 90° (для любого k). Докажите, что это множество ломаных в точности совпадает с множеством ломаных дракона ранга n.

12. Введем на клетчатой бумаге систему координат, направив оси по линиям сетки и взяв за единицу масштаба сторону клетки. Будем рисовать Главную ломаную дракона так, чтобы первыми тремя ее вершинами были точки (0;0), (0;1), (1;1). Пользуясь теоремой 1, можно продолжать эту ломаную сколько угодно раз: мы будем получать последовательно ломаные ранга 1, 2, 3,… Можно представить себе, что мы нарисовали их все и получили *бесконечную ломаную дракона* (Главную ломаную дракона ранга ∞). Ее первые 2^n звеньев образуют ломаную ранга n.

Докажите, что:

а) Конец такой ломаной ранга n будет находиться в точке

$$\left(2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4};\, 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}\right)$$

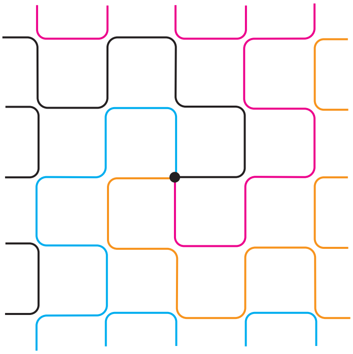
(красные точки на рисунке 4).

б) Слово, являющееся записью этой ломаной, можно быстро написать так. Сначала записываем чередующиеся буквы L и R, оставляя между ними промежутки для пропущенных букв: $L\_R\_L\_R\_L\_R\_L\_R\ldots$, а затем поступаем следующим образом. Пальцем левой руки укажем на первую букву, а правой рукой запишем ее в первый промежуток, затем левой рукой укажем на вторую букву, а правой вставим ее во второй промежуток, левой на третью… и так последовательно по всем буквам (не пропуская вновь вставленных), а правой вносим каждую указанную букву в первый свободный промежуток:

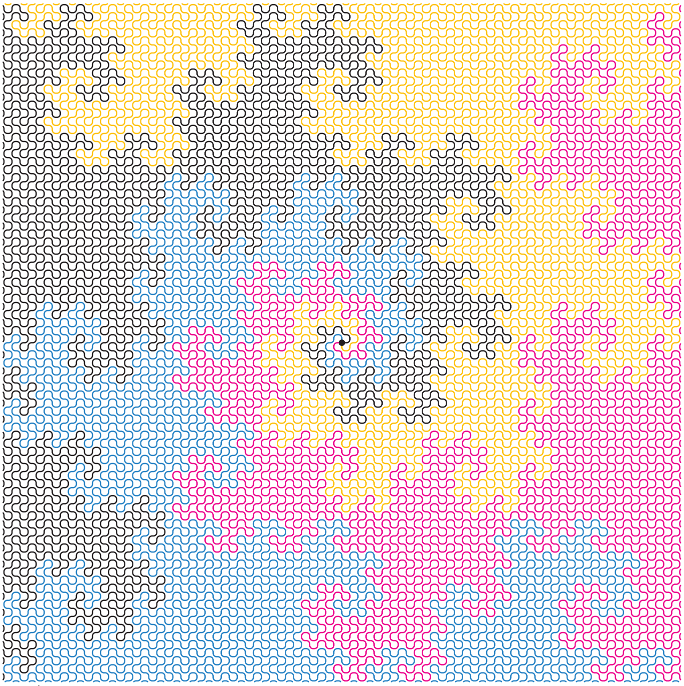
$$L\underline{L}R\underline{L}L\underline{R}R\underline{L}L\underline{L}R\underline{R}L\underline{R}R\underline{L}L\underline{L}R\underline{L}\ldots$$

в) Если, как в задаче 10, выпустить из одной точки четыре Главные ломаные дракона ранга ∞, то по каждому отрезку сетки пройдет ровно одно звено одной из этих ломаных (рис.12). (Это – трудная теорема; ее впервые доказал Д.Э.Кнут.)

Еще несколько красивых кривых дракона изображены на рисунках 13–15.



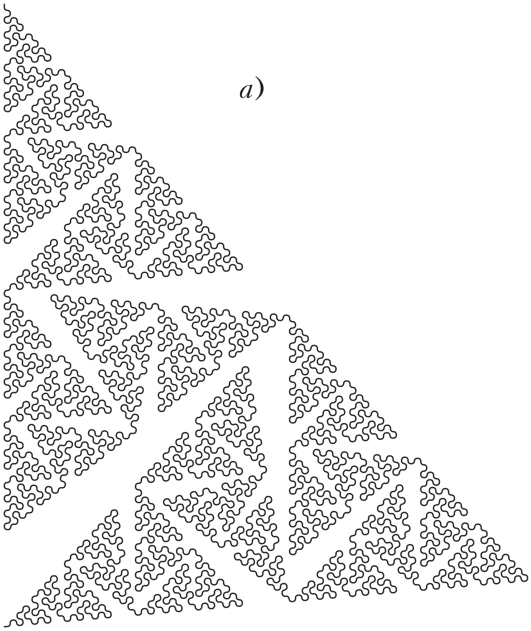
а)



б)

Рис. 12

а)



б)

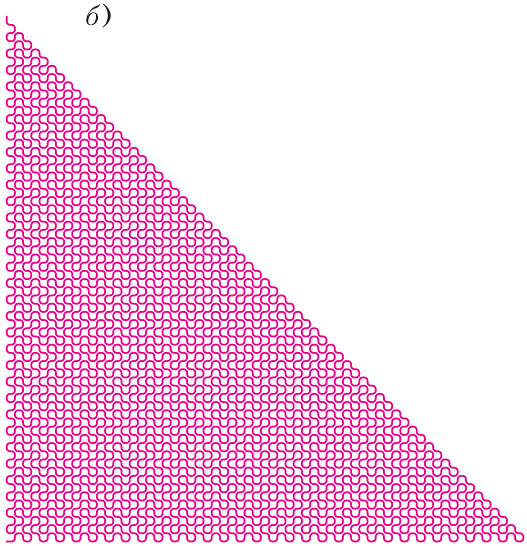


Рис. 13. Эта кривая получается, если, начиная с отрезка, повторять процесс «удвоения» 12 раз, причем чередовать повороты по и против часовой стрелки. Чтобы лучше показать, как идет эта кривая, мы поворачиваем каждый раз не на 90°, а на 95° (черная линия); если уменьшить углы до 90°, то получится кривая дракона, которая изображена на рисунке цветной линией; она заполняет равномерным узором равнобедренный прямоугольный треугольник

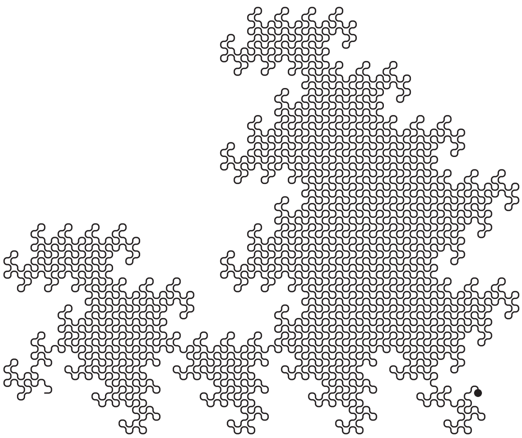


Рис. 14. Эта кривая дракона ранга 12 *имеет специальное название «Папа, мама и сын». Найдите ее середину. Можете ли вы себе представить, что кривая разбивается этой точкой на два совершенно одинаковых куска, получающихся друг из друга поворотом на* 90°? *Чтобы поверить в это, придется, вероятно, пройтись по кривой цветным карандашом от начала до середины*

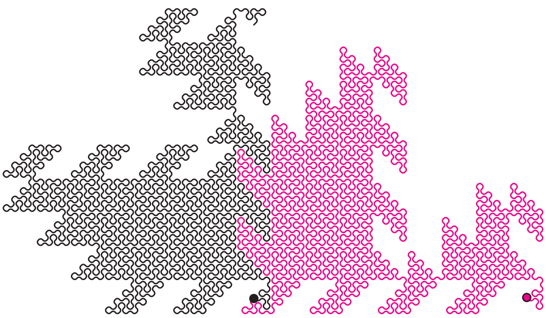


Рис. 15. Здесь одна из двух половин кривой (она называется «Паровоз») нарисована цветной, чтобы показать, как эти две кривые «сцепляются» между собой. Одна половина после поворота ее вокруг средней точки на 90° *совпадет с другой*

Ответы и указания

1. Меньше: 2^{30} см $= 1024^3$ см $= (1{,}024)^3 \cdot 10^9$ см $\approx$ $\approx 1{,}07 \cdot 10^9$ см $= 10700$ км, а до Луны примерно 384000 км.

2. Ломаная заменится зеркально симметричной. В записывающем ее слове каждая буква изменится на противоположную: R на L, а L на R.

3. б) 2^{n-2} (при $n \ge 2$); сравните с задачей 5, *г, д*.

4. Черепаха прочтет слово, которое получается из исходного слова, если записать его буквы в обратном порядке, а затем всюду поменять L на R, а R на L. Это утверждение верно для любой ломаной. Для ломаных дракона новое слово из старого получается совсем просто – надо только заменить в исходном слове среднюю букву на противоположную (см. задачу 5).

5. Используйте теоремы 1, 2 и задачу 3.

6. Вообще говоря, другие (например, для ломаной $RRLLRLLLRRLRRLL$).

7. Используйте теорему 2.

9. Можно провести индукцию по n (рангу ломаной), доказав с помощью задачи 8, что достраиваемые согласно теореме 2 треугольники не могут прилегать друг к другу катетами.

10. То, что две соседние ломаные (получающиеся друг из друга поворотом на 90°) не имеют общего отрезка, вытекает из теоремы 1 и задачи 9. Чтобы строго доказать, что две симметричные друг другу относительно точки O ломаные не могут иметь общего отрезка, можно использовать теорему Жордана: «замкнутая несамопересекающаяся линия делит плоскость на две такие области – внутреннюю и внешнюю, что любая линия, один конец которой лежит во внешней области, а другой во внутренней, пересекает данную линию»; при этом, поскольку наши ломаные дракона приходят в некоторые вершины по два раза, удобнее перейти к кривым дракона.

12. а) Проверьте, пользуясь теоремой 1 (индукция по n).

б) Сравните с задачей 7.

Вычисления без вычислений

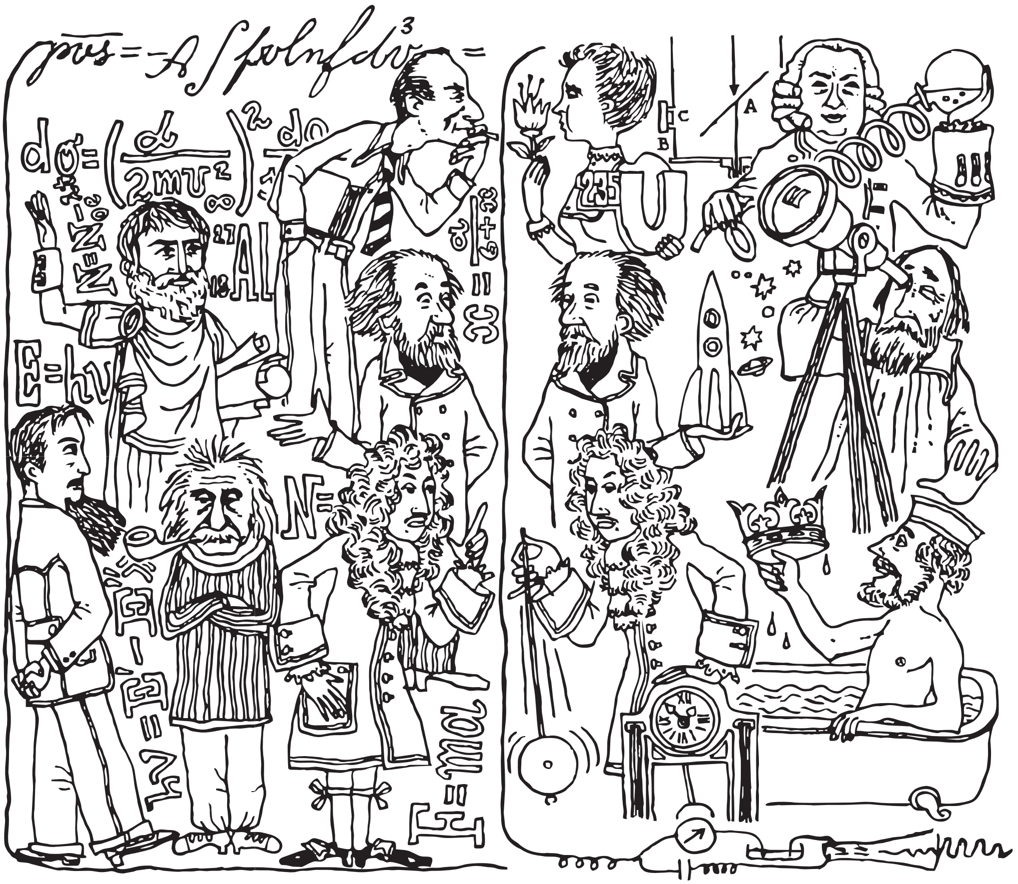
А.МИГДАЛ

Если математика – это искусство избегать вычислений, то теоретическая физика – это искусство вычислять без математики.

Высказывание, приведенное в качестве эпиграфа, возникло в результате споров физиков и математиков и нуждается в разъяснении. Даже самые простые вычисления в физике не обходятся без математики. Однако на первой, самой важной стадии работы физика-теоретика, когда устанавливается физическая картина явления, математика отступает на задний план и играет только подсобную роль. Но прежде чем говорить о связи физики и математики, следует пояснить, что такое теоретическая физика.

Как работают физики?

Экспериментаторы и теоретики. Существует два типа физиков – экспериментаторы и теоретики, причем эти две профессии почти никогда не совмещаются в одном лице. Физики-эксперимента-



Опубликовано в «Кванте» №8 за 1979 год.

торы исследуют соотношения между физическими величинами, или, говоря более торжественно, открывают законы природы, пользуясь экспериментальными установками, т.е. производя измерения физических величин с помощью приборов. Для этого надо глубоко понять изучаемые явления, чтобы знать, что и как измерять. Физики-теоретики изучают природу, пользуясь только бумагой и карандашом, т.е. выводя новые соотношения между наблюдаемыми величинами, опираясь на найденные ранее экспериментально и теоретически законы природы. Причина разделения этих двух профессий не только в том, что каждая из них требует своих специальных знаний: знания методов измерения – в одном случае и владения математическим аппаратом – в другом. Главная причина в том, что эти профессии соответствуют различным характерам мышления и различным формам интуиции. Интуиция, т.е. способность подсознательно находить правильный путь, играет важнейшую роль, особенно на первых стадиях работы. К сожалению, дар интуиции возникает не сразу, а в результате упорной работы, как награда за решение многих научных задач.

Поскольку теоретическая физика имеет дело с более отвлеченными понятиями, чем физика экспериментальная, физикутеоретику требуется более абстрактная форма интуиции, близкая иногда к интуиции математика. В прошлом веке, когда физика еще не была так специализирована, многие физики совмещали обе профессии. Так, Максвелл, который получил теоретически уравнения, описывающие все электромагнитные явления, занимался и экспериментами. Герц, который обнаружил экспериментально электромагнитные волны, был одновременно и хорошим теоретиком. И все-таки в каждом случае можно указать, какая из профессий главная: для Максвелла это – теоретическая физика, а для Герца – физика экспериментальная.

В XX веке одним из самых замечательных примеров «универсального» физика – и теоретика, и экспериментатора – был Энрико Ферми. Наряду со многими другими работами Ферми создал теорию радиоактивного распада и вместе с физиками своей группы открыл экспериментально искусственную радиоактивность элементов, возникающую при бомбардировке нейтронами.

Еще одним примером выдающегося теоретика, тесно связанного с экспериментом, был академик Г.И.Будкер, у которого теоретическая физика совмещалась с замечательными инженерными идеями. Он руководил теоретической разработкой и практическим осуществлением ускорителя на встречных пучках заряженных частиц в Новосибирском Академгородке.

Однако это – редкие исключения, и молодой человек, интересующийся физикой, должен решить для себя, какую из двух профессий он выбирает.

В дальнейшем речь пойдет о работе физиков-теоретиков.

Физика и математика. Итак, задача физика-теоретика – получать соотношения между наблюдаемыми величинами с помощью математических выкладок. Не означает ли это, что теоретическая физика представляет собой нечто вроде прикладной математики? Такая точка зрения совершенно неверна. И по характеру задач, и по методам подхода к задачам математика и теоретическая физика категорически отличаются.

В математике важнейшую роль играют математическая строгость, т.е. логическая безупречность всех выводов, вытекающих из принятых аксиом, и исследование всех логически возможных соотношений. Задача физики – воссоздать по возможности точную картину мира без строгих «правил игры», используя все известные экспериментальные и теоретические факты, а также основанные на интуиции догадки, которые в дальнейшем будут проверены на опыте. Так, математик исследует все логически возможные типы геометрий, физик же выясняет, какие геометрические соотношения осуществляются в нашем мире.

Математик, даже если он занимается прикладными задачами, т.е. задачами, пришедшими не из математики, берется за решение только тех задач, которые не требуют дополнительных недоказанных предположений. Физик же, как правило, имеет дело с задачами, в которых имеющихся исходных данных недостаточно для решения, и искусство состоит в том, чтобы угадать, какие недостающие соотношения реализуются в природе. Именно для этих догадок требуется не математическая, а физическая интуиция.

Убедительность в физике достигается получением одного и того же результата из разных исходных предпосылок. При этом приходится вводить лишние, логически не необходимые аксиомы, каждая из которых сама по себе не абсолютно достоверна. Единственное условие состоит в том, чтобы уметь оценивать степень убедительности того или иного предположения и ясно понимать, какие предположения требуют дальнейшей проверки.

Если какая-либо область физики достигнет такого развития, что все ее результаты можно будет вывести из нескольких строго установленных экспериментально аксиом, то эта область перестанет быть частью развивающейся физической науки и перейдет в раздел прикладной математики или техники. Так произошло с классической механикой.

Разумеется, очень полезно анализировать структуру физической теории, т.е. выяснять, из каких исходных предпосылок получаются те или иные результаты. Однако центр тяжести в таком аксиоматическом подходе – не в общности и математической строгости выводов, а в правильном выборе исходных предположений и в оценке того, какие из них наиболее достоверно подтверждены опытом. А для этого требуется интуиция физика. В тех случаях, когда эту работу проделывает математик, он обязательно, хотя бы на время, делается физиком-теоретиком. Иначе он рискует оказаться, по выражению польского сатирика Леца, в положении эскимоса, который вырабатывает для жителей Конго правила поведения во время жары.

Итак, математика и физика – науки с разными задачами и с разными методами подхода к задачам. В математике достоверность результатов достигается логической строгостью и анализом всех логически возможных решений. В физике рассматриваются только те решения, которые могут осуществляться в природе, и достоверность достигается многократной проверкой сделанных предположений. Математическая строгость в физике представляет собой невозможную и ненужную роскошь. Добиваться в физике математической строгости так же не нужно, как требовать от бригадиров лесоповала, чтобы они на работе разговаривали стихами. Но вместе с тем физик-теоретик должен свободно владеть математическим аппаратом, т.е. знать и уметь использовать все те математические методы, которые могут оказаться полезными при решении физических задач.

Качественный анализ

Попробуем показать на простых примерах, как работают физики-теоретики на первой, самой важной стадии работы, когда делается качественный анализ поставленной задачи. Как мы увидим, на этой стадии работы почти без всяких вычислений получаются грубые соотношения между входящими в задачу величинами. Следующая стадия работы – получение точных количественных соотношений с помощью математического аппарата теории – целиком опирается на первую стадию, во время которой проясняется физическая картина явления и возникает проект ожидаемого решения. Не имея такого предположительного проекта, нельзя приступать к поискам точного решения. Действительно, доказать удается только те утверждения, которые были заранее угаданы. Из этого правила почти не бывает исключений.

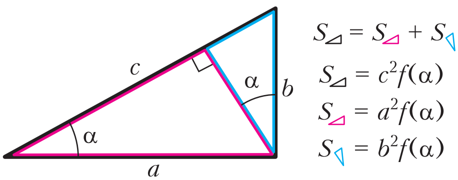
Одним из главных элементов качественного анализа является решение задачи на упрощенных моделях, в которых отброшено все несущественное. Усложнять решенную задачу несравненно проще, чем заново решать сложную.

В некоторых несложных случаях многое проясняет простой размерный анализ входящих в задачу величин и возможных соотношений между ними.

Размерные оценки. Для иллюстрации докажем теорему Пифагора, пользуясь соображениями размерности. Из размерности следует, что площадь S прямоугольного треугольника можно записать как произведение квадрата гипотенузы на некоторую функцию одного из острых углов: $S = c^2 f(\alpha)$. Аналогичным образом можно представить площади двух подобных прямоугольных треугольников, которые получатся, если опустить высоту из прямого угла. Для этих треугольников роль гипотенузы играют катеты исходного треугольника. Поэтому

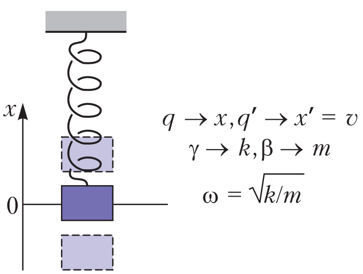
$$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha).$$

Сократив на $f(\alpha)$, получим теорему Пифагора.



В качестве другого примера рассмотрим задачу о нахождении периода колебаний грузика на пружине. Прежде всего выясним, какие величины могут входить в выражение для периода. Поскольку силы, действующие на грузик, – это сила тяжести и сила упругости, естественно предположить, что период колебаний зависит от ускорения свободного падения g и массы m грузика и от жесткости пружины k. Разумеется, такие величины, как температура и вязкость воздуха, не войдут в задачу, если мы пренебрегаем затуханием колебаний. (Чтобы упростить задачу, надо знать, чем можно пренебречь!) Из величин g, m и k можно составить только одну комбинацию, имеющую размерность времени, а именно $\sqrt{m/k}$. Период T равен

$$T = C\sqrt{\frac{m}{k}}.$$



Ускорение g не вошло в ответ. Безразмерная константа C не может быть найдена из размерных соображений; можно только сказать, что она не очень велика и не очень мала – она порядка единицы. Действительно, значение C должно быть найдено из решения ненаписанного нами уравнения движения грузика. А безразмерные коэффициенты, возникающие из решений уравнений, встречающихся в физике, как правило, оказываются порядка единицы.[1] Точное вычисление дает для C значение 2π. Таким образом, мы без вычислений, пользуясь только размерным анализом, нашли примерную величину периода колебаний грузика на пружине.

Пример обобщения – осциллятор. Во всех областях физики встречаются задачи, связанные с колебаниями систем около положения равновесия. Для понимания многих явлений, а следовательно, для качественного анализа этих явлений нужно знать общие свойства таких систем. Системы, совершающие колебания около положения равновесия, независимо от их устройства называют осцилляторами. Простейшие примеры осцилляторов – грузик на пружине, математический маятник. Более сложный пример – натянутая струна; у нее может быть много типов колебаний: колебания с пучностью посередине (основной тон), с одним узлом, двумя узлами и т.д. (обертоны). Таким образом, струна – это набор осцилляторов разных частот. Аналогичный пример – столб воздуха в органной трубе; его можно заставить колебаться с наинизшей частотой (основной тон) или с более высокой частотой, когда в некоторых точках воздушного столба частицы воздуха будут неподвижны (аналог узлов в колебаниях струны). Об-

[1] Это утверждение нельзя доказать в общем виде, но оно практически всегда справедливо, и этим фактом широко пользуются при всех оценках.

щее свойство всех осцилляторов состоит в следующем: независимо от конкретного устройства осциллирующей (т.е колеблющейся около положения равновесия) системы, энергия системы в любой момент времени может быть записана в виде

$$E = \frac{\gamma q^2}{2} + \frac{\beta q'^2}{2}, \qquad (1)$$

где q – величина, характеризующая отклонение от положения равновесия, а q' – скорость изменения величины q во времени (т.е. $q' = \Delta q/\Delta t$, где Δt – малый промежуток времени). Слагаемое $\Pi = \gamma q^2/2$ – это потенциальная энергия осциллятора; коэффициент γ называют жесткостью осциллятора. Слагаемое $K = \beta q'^2/2$ – это кинетическая энергия осциллятора; коэффициент β называют массой осциллятора. (Вспомните, как записывается энергия простейшего осциллятора – грузика на пружине, и вам станет понятно, почему γ называют жесткостью, а β – массой осциллятора.)

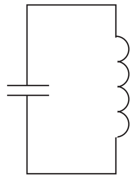
Как бы ни был конкретно устроен осциллятор, его угловая частота колебаний $\omega = 2\pi/T$ выражается следующим образом через жесткость γ и массу β:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Введение «обобщенного» осциллятора, координата которого – не обязательно расстояние от положения равновесия, а может иметь любой смысл, лишь бы энергия имела такую же структуру, как E в выражении (1), позволяет делать выводы о поведении колеблющейся системы без рассмотрения физической природы происходящих в ней процессов.

Для пояснения приведем еще один пример осциллятора, не похожий на все приведенные выше примеры. Допустим, имеется катушка индуктивностью L из хорошо проводящей проволоки, концы которой присоединяют к конденсатору емкостью C, имеющему заряд Q_0. В цепи возникают электромагнитные колебания. Если катушка сделана из сверхпроводника, колебания практически не будут затухать.

Энергия такой системы состоит из двух слагаемых: энергии магнитного поля в



$$q \to Q, q' \to Q' = I$$
$$\gamma \to 1/C, \beta \to L$$
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

катушке и энергии электрического поля в конденсаторе. Энергия электрического поля конденсатора пропорциональна квадрату заряда Q, который в данный момент находится на обкладке конденсатора: $\Pi = \frac{1}{C}Q^2/2$. Энергия магнитного поля катушки пропорциональна квадрату силы тока I, текущего в данный момент по катушке: $K = LI^2/2$. Но сила тока равна скорости изменения заряда конденсатора со временем: $I = Q'$. Таким образом, энергия магнитного поля катушки $K = LQ'^2/2$. Следовательно, энергия системы в любой момент времени равна

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2} + \frac{1}{2}LQ'^2.$$

Наша система – осциллятор; роль координаты осциллятора играет заряд Q, потенциальная энергия осциллятора – энергия конденсатора, кинетическая – энергия магнитного поля катушки. Из записи энергии видно, что жесткость этого осциллятора – величина $1/C$, а роль массы играет индуктивность L. Сразу можем записать частоту колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Такой осциллятор называется электрическим колебательным контуром.

Как угадать решение? Приведем пример того, как проясняются некоторые черты решения, прежде чем будет построен аппарат для точного решения задачи, до того как найдены уравнения, на основе которых задача будет решаться. Это заодно и пример более сложного анализа размерностей, чем в случае осциллятора.

Одна из труднейших и неразрешенных задач теоретической физики – связь гравитационных и электромагнитных явлений. Если такая связь существует, то в результате решения каких-то еще не найденных уравнений будет получено безразмерное число[2], дающее соотношение между гравитационной постоянной G и величинами, характеризующими электромагнитные явления, такими как скорость света c, заряд электрона e и его масса m. Если существенны квантовые явления, то в задачу может войти еще постоянная Планка h. Зная размерности величин G, c, e, m, h, нетрудно убедиться, что из этих величин можно составить только две независимые безразмерные комбинации:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}; \quad \xi = \frac{\hbar c}{Gm^2}$$

(напомним, что $\hbar = h/(2\pi)$).

Первая из этих комбинаций характеризует взаимодействие электрона с электромагнитным полем (безразмерный «заряд» электрона) и называется постоянной тонкой структуры. Подстановка численных значений дает $\alpha = 1/137$, $\xi = 5 \cdot 10^{44}$. Может ли такое большое число, как ξ, возникнуть в результате решения каких-либо разумных уравнений? Безразмерные числа, возникающие в результате решения физических задач, как мы уже говорили, имеют порядок нескольких единиц или долей единицы. Поэтому мы вправе ожидать, что величина ξ войдет в задачу в такой форме, чтобы в результате получилось число порядка 1. Пока мы применяли здравый смысл. Теперь должен быть сделан небольшой интуитивный логический скачок. Правдоподобно, что в теорию войдет комбинация

$$\alpha \ln \xi \sim 1.$$

Ясно, что знание такого соотношения облегчает поиски решения. Именно в такой форме входит величина ξ в существующие сейчас теоретические попытки решения задачи о связи электродинамики с гравитацией.

Предельное упрощение

Основная идея квантовой механики. Попробуем показать на другом примере, как, предельно упрощая задачу, можно определить главные черты явления. Этот пример пояснит, что такое качественный подход к задаче.

Согласно квантовой механике энергия электрона в атоме может принимать только дискретные значения. Возможные значения энергий электрона в атоме водорода даются выражением

$$E_n = -\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^2} \qquad (2)$$

(физики, как правило, не пользуются системой единиц СИ). Разности значений E_n для двух разных n ($n = 1, 2, 3,\ldots$) определяют с большой точностью частоты наблюдаемых на опыте спектральных линий. Основная идея квантовой механики состоит в том, что каждая частица (в данном случае – электрон) характеризуется неким волновым процессом с длиной волны

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv},$$

где m – масса частицы, v – ее скорость. Дискретные значения энергии электрона получаются из того условия, что на длине орбиты, по которой движется электрон, должно укладываться целое число волн. Если радиус орбиты r, то n-му состоянию электрона соответствует условие $2\pi r = \lambda n$ ($n = 1, 2,\ldots$), или $mv_n = \hbar n/r$. Отсюда нетрудно найти кинетическую энергию в n-ом состоянии:

$$W_n = \frac{mv_n^2}{2} = \frac{\hbar^2 n^2}{2mr^2}.$$

Полная энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле ядра, которая отрицательна и равна $U = -Ze^2/r$. Полная энергия электрона в атоме водорода равна

$$E_n(r) = \frac{\hbar^2 n^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}.$$

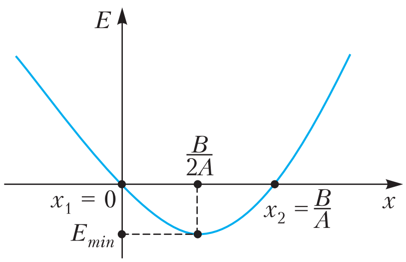
В нашем выводе мы предполагаем, что радиус орбиты r имеет фиксированное значение. Согласно квантовой механике радиусы орбит «разбросаны» в окрестности классически устойчивой орбиты. В качестве оценки радиуса можно взять значение r, которое соответствует минимуму

[2] Для того чтобы соотношение между различными физическими величинами не зависело от выбора единиц, оно должно быть записано в виде безразмерной комбинации.

энергии $E(r)$.

Чтобы найти минимум $E(r)$, поступим следующим образом. Перепишем выражение для $E(r)$ в таком виде:

$$E = Ax^2 - Bx .$$



Мы ввели такие обозначения: $x = 1/r$, $A = h^2n^2/(2m)$, $B = e^2$. Видно, что при $x_1 = 0$ и $x_2 = B/A$ значение E равно нулю. Внутри интервала $]x_1; x_2[$ E отрицательно. Где-то внутри этого интервала лежит минимум E. Будем для оценки считать, что $E_{\min}$ соответствует значение x в середине интервала, т.е. $x = B/(2A)$. Соответственно, $r = 1/x = 2A/B$, т.е.

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{me^2} .$$

(Отметим, что при $n = 1$ это выражение дает верную оценку для радиуса атома в наинизшем состоянии.) Подставив это значение r_n в выражение для $E_n(r)$, получим

$$E_n = -\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^2} ,$$

т.е. выражение, совпадающее с (2)!

В действительности электрон может с разной вероятностью находиться на любом расстоянии от ядра. Наше упрощение состояло в предположении, что это расстояние определенное, равное r, и находится из условия минимальности энергии. Разумеется, мы действовали грубо. Поэтому нельзя доверять числовому множителю впереди этой формулы, хотя он случайно получился правильным. Но всему остальному можно доверять! И множителю $me^4/\hbar^2$, и, что особенно важно, зависимости от «квантового числа» n.

Точное решение потребовало бы знания основного уравнения квантовой механики (уравнение Шредингера) и очень сложной (по школьным понятиям) математики. То, что мы получили, и есть качественное решение, когда результат находится с точностью до неизвестного числового множителя, но характер зависимости от параметров задачи передается точно. Качественное решение чрезвычайно облегчает получение точного решения, поскольку выясняются главные черты явления. Более того, если есть качественное решение, а точного не удается получить аналитически, можно без особых потерь в понимании задачи найти его с помощью вычислительных машин.

Еще одно обобщение – квантовые осцилляторы. Не сложнее решается задача о квантовании осциллятора. При этом нам не существенно, как реализован осциллятор – представляет ли он груз, колеблющийся на пружине, или электрический колебательный контур.

Обозначим через q обобщенную координату осциллятора. Запишем энергию осциллятора:

$$E = \frac{\gamma q^2}{2} + \frac{\beta q'^2}{2}.$$

Можно себе представить, что осциллятор – это некая «частица» с массой β, колеблющаяся на пружине с жесткостью γ. Для того чтобы сформулировать для этого объекта основную идею квантовой механики, введем длину волны λ волнового процесса, связанного с нашей частицей:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\beta q'} .$$

В знаменателе стоит произведение «массы» на ее скорость. Так как скорость изменяется при движении частицы, то и длина волны тоже меняется – она минимальна вблизи положения равновесия и растет в тех областях, где скорость частицы мала.

Пусть частица движется в области от $-q_0$ до q_0. (Подчеркнем, что $2q_0$ – не размах колебаний осциллятора, а та область, в которой «дрожит» его координата.) Для того чтобы образовалась стоячая волна, на «длине» $2q_0$ должно укладываться целое число полуволн: $2q_0 = (n+1)\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). В качестве оценки скорости возьмем значение скорости при $q = q_0$, т.е. $(q')_0 = 2\pi\hbar/(\beta\lambda) = \pi\hbar(n+1)/(2\beta q_0)$. Подставляя это значение в выражение для кинетической энергии, находим

$$W_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{8\beta}\frac{(n+1)^2}{q_0^2}.$$

Для полной энергии получаем

$$E_n(q_0) = \frac{(\pi\hbar)^2}{8\beta}\frac{(n+1)^2}{q_0^2} + \frac{\gamma q_0^2}{2}.$$

При малых значениях q_0 энергия велика из-за первого слагаемого, а при больших q_0 – из-за второго. Примерное значение q_0, дающее наименьшую энергию, получится, если приравнять оба слагаемых. Из этого условия находим

$$q_0^2 = \frac{\pi\hbar(n+1)}{2\sqrt{\beta\gamma}}.$$

Подставляя в выражение для энергии, получаем

$$E_n = \frac{\pi}{2}\hbar\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}(n+1) = \frac{\pi}{2}\hbar\omega(n+1)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Величина $\omega = \sqrt{\gamma/\beta}$ представляет собой частоту колебаний классического осциллятора.

При точном расчете для энергии получается выражение

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, мы ошиблись в числовом множителе ($\pi/2$ вместо 1), а также в численном значении энергии в самом низшем состоянии, т.е. при $n = 0$ ($\frac{\pi}{2}\hbar\omega$ вместо $\frac{1}{2}\hbar\omega$). Но все остальное получилось точно! Теперь, когда результат получен, следует задуматься над тем, что мы использовали для его получения и что вытекает из полученных нами выражений для энергии осциллятора и для величины q_0^2.

Прежде всего, мы применили к нашему осциллятору, не интересуясь тем, как он устроен, принципы квантовой механики, установленные первоначально применительно к электронам. Конечно, естественно ожидать, что общие принципы должны быть такими же и для других частиц, массы которых отличаются от массы электрона. Действительно, такое обобщение с большой точностью подтвердилось опытом. Но почему эти же принципы можно применять и к такому объекту, как колебательный контур, где роль «координаты» играет заряд на обкладках конденсатора? Здесь мы подошли к важному предположению, которое широко использовалось и используется в теоретической физике XX века. Если две системы имеют энергию, одинаково зависящую от координат и скоростей, то такие системы обладают одинаковыми свойствами, несмотря на то, что «координаты» и «скорости» могут иметь совершенно разный смысл в этих системах.

Не было ни одного примера, где бы это предположение противоречило опыту. Поэтому мы вправе считать, что решили задачу о применении квантовой механики сразу для всех возможных осцилляторов.

Теперь подумаем, что означают полученные нами результаты. Как они переходят в формулы классической механики? Прежде всего, мы получили, что энергия изменяется не непрерывно, а порциями величины $\hbar\omega$. Правда, величина $\hbar$ очень мала, и для обычных макроскопических осцилляторов эта скачкообразность изменения энергии практически не наблюдается. Впрочем, есть такие особые макроскопические системы, где скачкообразность играет определяющую роль (например, лазеры). Правильность полученного нами выражения для энергии осциллятора проверена с большой точностью для многих видов осцилляторов.

Есть еще одно важное свойство квантового осциллятора, которое тоже нами получено. Когда энергия минимальна, классический осциллятор находится в покое в положении равновесия; между тем квантовый осциллятор в наинизшем энергетичес-

(Продолжение см. на с. 37)

Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения

В.АРНОЛЬД

Уравнение было очень сложное, но профессор с присущей ему скромностью назвал его обыкновенным.

Из газетного интервью с математиком

Дифференциальные уравнения – одно из основных орудий математического естествознания. Изобрел их Исаак Ньютон (1642–1727). Задачи, по существу приводящие к дифференциальным уравнениям, появлялись и до Ньютона. Однако решать их умели лишь такие гении, как президент французской Академии наук Х.Гюйгенс (1629–1695) и учитель Ньютона, математик и богослов, проповедник английского короля И.Барроу (1630–1677). После Ньютона их решают любые студенты и даже школьники.

Ньютон считал свое изобретение настолько важным, что зашифровал его в виде анаграммы[1], смысл которой в современных терминах можно вольно передать так: «полезно» решать дифференциальные уравнения (так как ими выражаются законы природы).

В другой, более длинной анаграмме Ньютон зашифровал также и придуманный им рецепт решения всех уравнений, в том числе и дифференциальных.

Теория дифференциальных уравнений перерабатывает вопросы естествознания в геометрические задачи о кривых, определенных векторными полями (см. ниже), подобно тому, как декартов метод координат превращает вопросы об алгебраических уравнениях в задачи о линиях и поверхностях.

Состояния процесса

Чтобы изучить какой-либо процесс, нужно прежде всего уметь описывать множество всевозможных состояний этого процесса. Посмотрим, как это делается, на примерах.

1. Движение точки по прямой. Опыт показывает, что для определения движе-

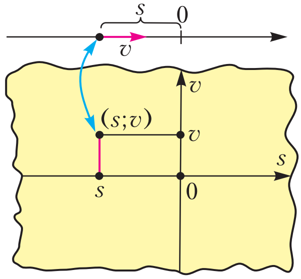


Рис. 1. Движение по прямой

[1] *6accdael3eff7i3l9n4o4qrr4s9tl2vx*. Расшифровка: *data aequatione quotcunque fluentes quantitates invuolvente fluxiones invenire et vice versa*, т.е. «по данному уравнению, содержащему сколько-нибудь функций, найти производную и обратно». Эта анаграмма содержится в знаменитом «втором письме» Ньютона секретарю Королевского общества (английской академии наук) Ольденбургу от 24 октября 1676 года. Письмо предназначалось Лейбницу (1646–1716) и содержало сообщение об изобретении математического анализа. Переписку с Лейбницем, жившим в Германии, Ньютон вел через Ольденбурга (которого впоследствии заключили в Тауэр за связь с иностранцами).

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1986 год.

ния материальной точки по прямой в отсутствие внешних сил достаточно задать в начальный момент ее скорость и положение на прямой. Поэтому множество всех ее состояний математик отождествляет с координатной плоскостью $(s;v)$: каждой точке на этой плоскости отвечает материальная точка, движущаяся со скоростью v и занимающая положение с координатой s, и обратно – каждому состоянию отвечает своя точка плоскости (рис.1).

2. Колебания маятника. Состояние плоского маятника тоже описывается двумя параметрами, например углом отклонения θ от вертикали и угловой скоростью ω маятника (рис.2). Стало быть, множеством состояний маятника снова будет плоскость? Не совсем. Дело в том, что при изменении угла θ на 2π маятник возвращается в прежнее положение. Поэтому множество состояний здесь – цилиндрическая поверхность (см. рис.2).

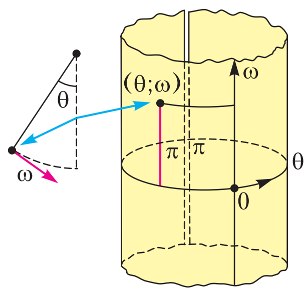


Рис. 2. Колебания маятника

3. Положение возов на двух дорогах. Города A к B соединены двумя непересекающимися дорогами, на каждой из которых находится воз; нас интересует их взаимное расположение. Положение воза на первой дороге (рис.3) можно определить числом – долей расстояния от A до B (по первой дороге), заключенной между A и возом; аналогично, воз на второй дороге определяется такой же долей по второй дороге. Поэтому интересующее нас множество состояний описывается точками $(x;y)$ единичного квадрата ($0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$).

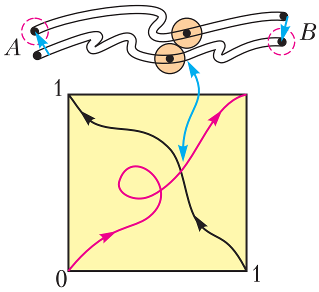


Рис. 3. Задача о двух возах на двух дорогах

Множества состояний процесса в теории дифференциальных уравнений называют *фазовыми пространствами*. Итак, каждая точка фазового пространства (*фазовая точка*) изображает *состояние* процесса. А само *течение* конкретного процесса изображается линией в фазовом пространстве; эти линии называются *фазовыми траекториями*.

Введение фазового пространства процесса геометризует теорию – вопросы о ходе процесса превращаются в вопросы о поведении фазовых траекторий. Получающиеся геометрические задачи могут быть трудными. Однако бывает и так, что уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу.

Задача (Н.Н.Константинов). *Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из A в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза с сеном радиуса l, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?*

Фазовым пространством здесь служит единичный квадрат. Начальное положение машин (в городе A) соответствует левому нижнему углу квадрата, а движение машин из A в B изображается кривой, ведущей в противоположный угол (см. рис.3). Точно так же начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата, а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата (левый верхний). Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займет положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Итак, разминуться не удается.

В рассмотренной задаче не участвовали дифференциальные уравнения, но ход рассуждений близок к тому, чем мы будем заниматься дальше: описание хода процесса как линии подходящего фазового пространства часто оказывается чрезвычайно полезным.

Общая схема теории дифференциальных уравнений такова. Поскольку начальное состояние рассматриваемых нами процессов определяет их будущий ход, оно определяет и скорость изменения состояния, т.е. скорость движения фазовой точки. Зависимость скорости движения фазовой точки от ее положения (или *локальный закон эволюции* процесса) как раз и выражается, по Ньютону, дифференциальным уравнением. Геометрически это уравнение изображается векторами, приложенными к каждой фазовой точке и указывающими, куда и с какой скоростью из этой точки выходить. Вместе все эти векторы составляют *векторное поле фазовой скорости* (см. например, рисунки 5, 11 ниже). Теория дифференциальных уравнений должна по векторному полю описывать ход процесса, т.е. находить траектории движения фазовых точек, отвечать на вопросы о характере их движения (например, на такие вопросы: будут ли траектории ограничены? возвращаются ли они к исходной точке?). Значение этих вопросов для изучения процесса очевидно.

Уравнение математического маятника

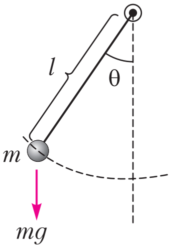


Рис. 4. Математический маятник

Согласно законам механики угловое ускорение маятника пропорционально моменту силы тяжести (рис.4):

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta,$$

где m – масса, l – длина, θ – угол отклонения; точка сверху означает производную по времени t (здесь и всюду ниже), две точки – вторую производную, $I = ml^2$ – момент инерции. Знак минус в уравнении объясняется тем, что момент стремится уменьшить отклонение. После сокращений получим $\ddot{\theta} = -k\sin\theta$, где $k = g/l$. Коэффициент k можно сделать равным 1 подходящим выбором масштаба времени (поделив t на $\sqrt{k}$). Тогда уравнение математического маятника примет вид

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta \cdot \qquad (1)$$

Фазовым пространством маятника является цилиндр $(\theta;\omega)$, где $\omega = \dot{\theta}$ – угловая скорость. Мы можем записать уравнение (1) в виде системы

$$\dot{\theta} = \omega,\ \ \dot{\omega} = -\sin\theta\,, \qquad (2)$$

в которую входят только первые производные неизвестных θ и ω. Эта система выражает локальный закон эволюции состояния маятника: скорость изменения выражена через само состояние.

Решить уравнение (1) (или систему (2)), оказывается, не так легко. Если ограничиться небольшими углами θ (*малые колебания*), то $\sin\theta \approx \theta$. Поэтому при малых θ пользуются вместо (1) приближенным уравнением $\ddot{\theta} = -\theta$. Оно называется *уравнением малых колебаний маятника*. Его решения $\theta = C\sin(t + \varphi)$ вам известны из курса физики: *при малых углах отклонения плоский математический маятник совершает гармонические (синусоидальные) периодические колебания*. Вопрос о том, насколько меняется этот вывод при переходе к «истинному» уравнению маятника (1), нуждается в специальном исследовании.

Воспользуемся фазовым пространством системы (2) – цилиндром $(\theta;\omega)$. В каждой точке фазового пространства построим *вектор фазовой скорости*, т.е. вектор с координатами $(\dot{\theta};\dot{\omega}) = (\omega; -\sin\theta)$ – геометрический эквивалент закона природы (1). Полученная картина – *поле фазовой скорости* – изображена на рисунке 5 (для наглядности мы разрезали цилиндр по образующей и развернули его).

На этой картине можно разглядеть следующее. В двух точках фазовая скорость равна нулю. Точке A отвечает нижнее (устойчивое) положение равновесия, точ-

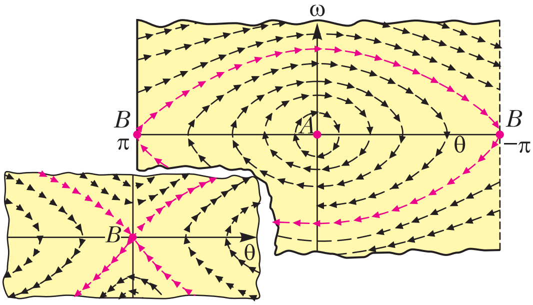


Рис. 5. Поле фазовой скорости математического маятника

ке B – верхнее (неустойчивое) положение равновесия. При малых значениях θ, $\dot\theta$ видно, что точки фазового пространства перемещаются по замкнутым кривым, похожим на окружности (малые колебания), при увеличении θ замкнутые кривые увеличиваются и растягиваются в подобие эллипсов (колебания большой амплитуды).[2] Особую роль играют траектории, помеченные красными стрелками: упавший из положения неустойчивого равновесия маятник совершает полный оборот и вновь замирает в верхнем положении. Эта траектория отделяет колебания от (неравномерных) вращений, которые совершает маятник, если его скорость при $\theta = 0$ превышает в наших безразмерных единицах число 2.

Караси (нормальное размножение)

В большом пруду разводят карасей. Караси не мешают друг другу, корма им хватает. Как будет меняться число карасей $x(t)$ с течением времени t? Скорость прироста карасей при этих условиях оказывается пропорциональной количеству особей; поэтому можно написать

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0 . \qquad (3)$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением нормального или мальтузианского размножения*.[3] (Напомним, что $\dot{x}$ обозначает производную по времени.)

Теорема существования. *Любая функция вида $x = Ce^{kt}$, где C – постоянная, является решением уравнения* (3).

Доказательство: подставьте в уравнение.

Из доказанной теоремы следует

Теорема единственности. *Других решений у уравнения* (3) *нет.*

Доказательство. Любую функцию можно записать в виде $x(t) = C(t)e^{kt}$. Тогда $\dot{x} = \dot{C}e^{kt} + kx$. Поэтому для выполнения равенства $\dot{x} = kx$ необходимо и достаточно, чтобы $\dot{C} = 0$, т.е. чтобы C было константой.

Графики решений уравнения называются *интегральными кривыми*. Эти кривые лежат в *пространстве–времени*, т.е. на плоскости с координатами $(t; x)$. Для вычерчивания интегральных кривых полезна заготовка, которая называется *полем направлений* уравнения и состоит из маленьких отрезочков, приложенных в каждой точке пространства–времени под углом к оси времени, тангенс которого равен правой части уравнения (kx для уравнения (3); рис.6). Интегральная кривая в

[2] Замкнутость фазовых траекторий означает периодичность колебаний (трение мы не учитываем). Замкнутость вытекает из следующей теоремы Гюйгенса («закон сохранения энергии»): $E = \dot\theta^2/2 - \cos\theta$ *при движении не меняется*. Доказательство: $\dot{E} = \ddot\theta\dot\theta + \dot\theta\sin\theta = 0$. Доказательство самого Гюйгенса было, конечно, иным: он не знал анализа. Однако не следует недооценивать силу методов предшественников Ньютона. Гюйгенс или Барроу нашли бы, скажем, значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\sin x}{\arcsin\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\arcsin x}$$

мгновенно из геометрических соображений (редко кто из современных математиков справляется с вычислением этого предела за час).

[3] В некоторых случаях скорость размножения оказывается пропорциональной не числу особей, а числу пар. Такое аномальное размножение гораздо медленнее обычного при малой плотности населения (например, китам некоторых видов трудно найти пару). Напротив, при больших x размножение со скоростью, пропорциональной x^2, приводит к «взрыву» за конечное время: график $x(t)$ имеет вертикальную асимптоту (почему?). Эта ситуация реализуется в уравнениях химической кинетики, где скорость реакции пропорциональна количеству каждого из реагентов.

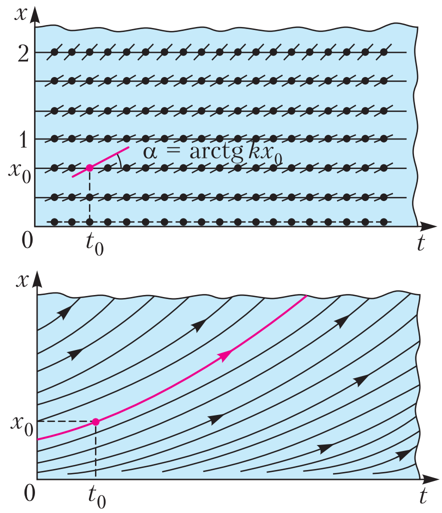


Рис. 6. Поле направлений уравнения нормального размножения $\dot{x} = kx$ *и решение, проходящее через начальную точку* $(t_0; x_0)$

каждой своей точке касается соответствующего отрезка и, обратно, кривая, всюду касающаяся наших отрезков, будет графиком решения (в этом и состоит геометрический смысл дифференциального уравнения).

Мы только что доказали, что *через каждую точку пространства–времени проходит ровно одна интегральная кривая* $x = Ce^{kt}$ *уравнения* (3). Эта формула выражает закон нормального размножения: для удвоения количества карасей всегда требуется одно и то же время независимо от их количества. Период удвоения населения Земли в настоящее время около 40 лет. Следовательно, число живущих сейчас людей больше числа умерших за 1000 лет и было бы больше числа всех когда-либо умерших людей, если бы скорость прироста не менялась. Время существования человечества получается тогда порядка 2000 лет; следовательно, скорость прироста населения раньше была меньше.

Замечания

1. Наши рассуждения основывались на угадывании решений $x = Ce^{kt}$. Найти эти решения можно следующим более систематическим образом. Тангенс угла наклона интегральной кривой уравнения $\dot{x} = v(x)$ к оси t равен $v(x)$. Значит, тангенс угла наклона к оси x равен $1/v(x)$. Вдоль интегральной кривой (если она нигде не параллельна оси t) можно выразить t в виде функции от x. Обозначая производную по x штрихом, получим $t' = 1/v(x)$. Значит, t есть первообразная от $1/v$. Это позволяет выразить t через x, а затем и x через t. (Разумеется, прямые пространства–времени, где $v(x) = 0$, приходится выкидывать, чтобы не делить на ноль.) При $v(x) = kx$ получаем $t' = 1/(kx)$, $kt = \ln|x| + \text{const}$, $x = Ce^{kt}$.

2. Теорема единственности, утверждающая, что не совпадающие интегральные кривые не пересекаются, – чрезвычайно удивительный факт, противоречащий наглядной очевидности и физическому опыту. Например, интегральные кривые уравнения (3) при $k = 1$, проходящие через точки $(0;0)$ и $(0;1)$ при $t = -5$, на глаз неразличимы, а при $t = -30$ между ними не умещаются и атомы. Тем не менее, математики считают их непересекающимися и при $t = -10^{10}$.

3. В физической литературе последнего времени подвергается сомнению данный Ньютоном в 1684 году вывод законов Кеплера из (указанного ему Гуком в письме от 6 января 1680 г.) закона всемирного тяготения: этот вывод неявно использует не доказываемую Ньютоном теорему единственности для уравнения движения. В действительности, однако, единственность следует из существования решения, зависимость которого от начальной точки выражается дифференцируемой функцией. Доказательство единственности в этом случае аналогично приведенному выше для уравнения размножения, нужное же решение Ньютон предъявил. В письме Галлею о своей дискуссии с Гуком Ньютон дал описание разницы между подходами математиков (Ньютона) и физиков (Гука) к естествознанию, остающееся актуальным и сегодня: «Математики, которые все открывают и устанавливают и проделывают всю работу, должны довольствоваться ролью сухих вычислителей и чернорабочих; другой, который всего лишь все схватывает и на все претендует, присваивает себе все изобретения как своих последователей, так и своих предшественников». В обязанности Гука как куратора Королевского общества входило доказывать опытами на еженедельных заседаниях общества по 2 или 3 новых закона природы, что он и делал в течение 40 лет. Доказываемые законы могли быть открыты и другими, но Гук насчитывал до 500 законов, открытых лично им. Естественно, он не все успевал обосновывать математически.

Вернемся, однако, к нашим карасям. Через некоторое время карасей станет столь много, что им не будет хватать корма и им станет тесно; дальнейший прирост уже не будет удовлетворять уравнению (3).

Караси при нехватке пищи (логистическая кривая)

Если наш пруд с карасями невелик или если число карасей в большом пруду сильно возросло, конкуренция из-за пищи приводит к уменьшению скорости прироста. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент k зависит от числа карасей линейно, т.е. $k = a - bx$ (при не слишком больших x всякую гладкую функцию можно аппроксимировать линейной). Мы приходим, таким образом, к уравнению размножения с учетом конкуренции: $\dot{x} = (a - bx)x$. Коэффициенты a и b можно превратить в единицы выбором масштабов t и x. Мы получаем так называемое *логистическое уравнение*

$$\dot{x} = (1 - x)x. \qquad (4)$$

Поле направлений уравнения (4) в пространстве–времени показано на рисунке 7,*а*, а на рисунке 7,*б*, показаны графики

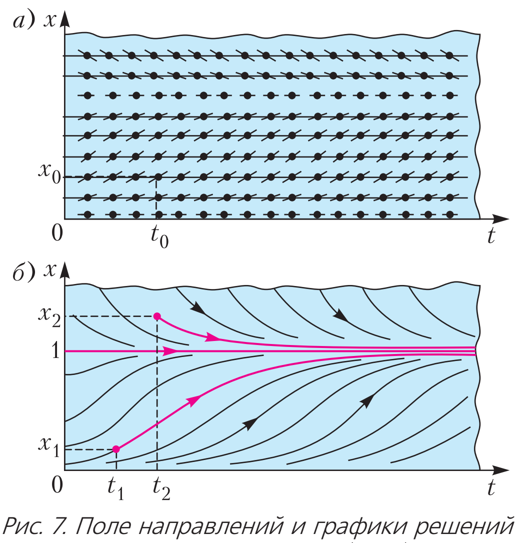


Рис. 7. Поле направлений и графики решений логистического уравнения $\dot{x} = (1 - x)x$. Решения $x = 1$ и $x = 0$ отвечают положениям устойчивого и неустойчивого равновесия

решений. S-образные интегральные кривые в полосе $0 < x < 1$ называются *логистическими кривыми*. Мы видим, что

1) процесс имеет два положения равновесия: $x = 0$ и $x = 1$;

2) между прямыми $x = 0$ и $x = 1$ поле направлено вверх от 0 к 1, а при $x > 1$ – вниз к 1.

Таким образом, положение равновесия 0 неустойчиво (раз появившееся население карасей начинает расти), а положение равновесия 1 устойчиво (меньшее население растет, большее – убывает). Каким бы ни было начальное число карасей $x > 0$, с течением времени процесс выходит к устойчивому состоянию равновесия $x = 1$. У каждого пруда, таким образом (при неизменных прочих условиях), имеется свое «правильное» число карасей, и любая популяция карасей будет к этому числу стремиться.

Ловля карасей

До сих пор мы рассматривали свободную популяцию карасей, развивающуюся по своим внутренним законам. Предположим теперь, что мы карасей вылавливаем (скажем, колхозный пруд регулярно снабжает местный рыбный магазин живой рыбой). Предположим, что скорость отлова постоянна. Мы приходим к *дифференциальному уравнению отлова*

$$\dot{x} = (1 - x)x - c. \qquad (5)$$

Величина c характеризует разрешаемую скорость отлова и называется *квотой*.

На рисунке 8 показаны три разновидности графиков решений уравнения (5) при трех разных c.

Мы видим (рис.8,*а*), что при не слишком большой скорости отлова ($0 < c < 1/4$) существуют два положения равновесия ($x = A$ и $x = B$). Нижнее положение равновесия A неустойчиво. Если по каким-либо причинам (перелов, болезни) в некоторый момент величина популяции x опустится ниже A, то в дальнейшем вся популяция за конечное время исчезнет. Верхнее положение равновесия B устойчивое – это стационарный режим, на который выходит популяция при постоянном отлове c.

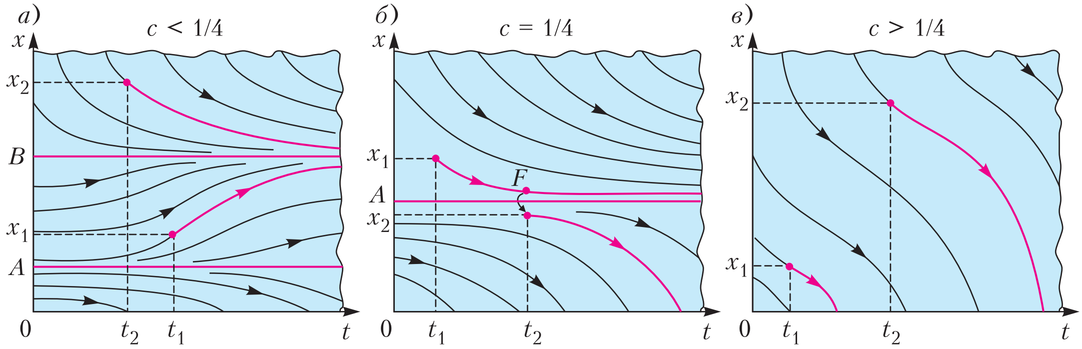


Рис. 8. Решения уравнения отлова $\dot{x} = (1-x)x - c$ при разных значениях квоты отлова c. При $c < 1/4$ любая популяция стремится к устойчивому равновесию $x = B$, при $c = 1/4$ положение равновесия неустойчиво, при $c > 1/4$ любая популяция вымирает

Естественно, равновесное население пруда, в котором производится отлов, меньше, чем в пруду, в котором лов не ведется.

Если $c > 1/4$ (рис.8,*в*), то равновесий нет и все караси будут отловлены за конечное время (завышенный план по продаже живой рыбы в магазине приведет к ее гибели; исторический пример такого рода – истребление стеллеровой коровы).

При $c = 1/4$ (рис.8,*б*) имеется одно неустойчивое состояние равновесия ($A = B = 1/2$). Отлов с такой скоростью при достаточно большой начальной популяции математически возможен в течение сколь угодно длительного времени, однако сколь угодно малое колебание численности установившейся равновесной популяции вниз (см. точку F) приводит к полному отлову карасей за конечное время (план отлова $c = 1/4$ для магазина «Рыба» тоже не годится).

Таким образом, хотя теоретически допустимы любые квоты вплоть до максимальной ($c \le 1/4$), максимальная квота $c = 1/4$ приводит к неустойчивости и недопустима.[4] Более того, практически недопустимы и близкие к $1/4$ квоты, так как при них опасный порог A близок к установившемуся режиму B (небольшие случайные отклонения отбрасывают популяцию ниже порога A, после чего она погибает).

Оказывается, что все же можно так организовать отлов, чтобы устойчиво получать улов со скоростью $c = 1/4$. Посмотрим, как это делается.

Введение обратной связи

Фиксируем вместо абсолютной скорости отлова относительную, т.е. фиксируем отлавливаемую за единицу времени долю наличной популяции:

$$\dot{x} = (1-x)x - px . \qquad (6)$$

На рисунке 9 показано пространство – время для уравнения (6) (при $p < 1$) и графики некоторых решений. Видно, что нижнее, неустойчивое положение равновесия теперь в точке $x = 0$, второе положение равновесия B устойчиво при любом p (если только $0 < p < 1$).

После некоторого периода установления популяция карасей выходит на стационар-

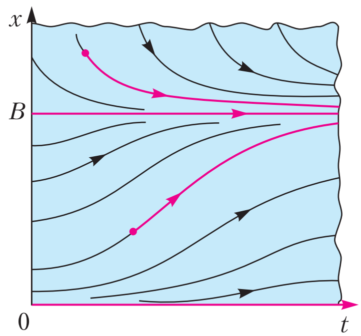


Рис. 9. Решения уравнения отлова с относительной квотой $\dot{x} = (1-x)x - px$ при $p < 1$. Любая популяция стремится к устойчивому значению $x = B$

[4] Важный для экономики вывод математической экологии: стремление максимизировать прибыль, доход или количество продукции чревато возникновением неустойчивости системы.

ный режим $x = B$. Абсолютная скорость улова устанавливается при этом равной $c = pB$. (Это – ордината точки пересечения графиков функций $v = (1-x)x$ и $v = px$.) Исследуем поведение этой величины при изменении p. При малых относительных выловах (малых p) установившаяся скорость отлова тоже мала; при $p \to 1$ она тоже стремится к нулю (перелов). Наибольшее значение абсолютной скорости c равно наибольшей ординате графика функции $v = (1-x)x$. Она достигается, когда прямая $v = px$ проходит через вершину параболы (т.е. при $p = 1/2$), и $c = 1/4$ (рис.10).

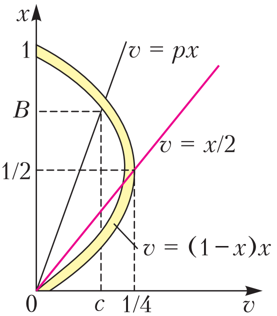


Рис. 10. Нахождение оптимального устойчивого режима отлова с относительной квотой

Выберем $p = 1/2$ (т.е. назначим относительную квоту так, чтобы установившаяся популяция составляла половину необлавливаемой). Мы достигли, как и было обещано, максимально возможной стационарной скорости отлавливания $c = 1/4$, причем система остается устойчивой (возвращается к установившемуся состоянию при малых отклонениях популяции от установившейся).[5]

Караси и щуки

В нашем пруду с карасями завелись щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы по экспоненте, со скоростью $\dot{x} = kx$ (пруд большой). Но теперь следует учесть карасей, съеденных щуками, и мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей x, так и числу щук y, тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x} = kx - axy$. Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y} = -ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y} = -ly + bxy$. Мы приходим, таким образом, к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы «хищник–жертва»:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \qquad (7)$$

Эта модель называется *моделью Лотка–Вольтерра.*

Фазовым пространством этой системы служит угол $x \geq 0$, $y \geq 0$. Нарисуем на нем поле фазовой скорости системы (рис.11), т.е. к каждой точке $(x; y)$ приложим вектор

$$(kx - axy; -ly + bxy).$$

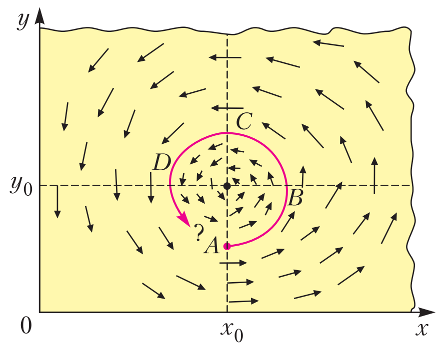


Рис. 11. Поле фазовой скорости в модели «хищник–жертва»

У этого поля есть *особая точка* (к ней приложен нулевой вектор), а именно точка $(l/b; k/a)$; она отвечает равновесному количеству карасей и щук, когда прирост карасей уравновешивается деятельностью щук, а прирост щук – их естественной смертностью.

Если начальное число щук меньше $y_0 = k/a$ (точка A на рисунке), то количество карасей и щук растет, пока размножившиеся щуки не начнут съедать больше карасей, чем их рождается (точка B), затем число карасей начнет убывать, а число щук продолжает расти, пока нехватка пищи не приведет и щук к вымиранию (точка C); затем число щук уменьшится настолько, что караси снова начнут размножаться (точка D); начавшееся размножение карасей приведет к

[5] Но для этого планирование должно быть гибким: план уменьшается при неурожае и увеличивается при благоприятных условиях.

тому, что со временем и щуки начнут размножаться.

Но вернемся ли мы к точке A? Иными словами, будет ли процесс колебания повторяться периодически? Ответ на этот вопрос может зависеть от выбора начальной точки A (а также от значения параметров системы).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите уравнение логистической кривой.

2. Являются ли интегральные кривые уравнений (5) и (6) растянутыми логистическими кривыми?

3. Докажите, что интегральные кривые уравнений (5) и (6), расположенные вне полосы между A и B, имеют вертикальные асимптоты.

4. Могут ли пересекаться не совпадающие интегральные кривые логистического уравнения?

5. Докажите, что период T колебания маятника (1) растет с амплитудой.

6. Приближенно сосчитайте период колебания маятника малой амплитуды a.

7. Найдите предел периода колебаний маятника при стремлении амплитуды к π.

8. Докажите, что период колебания маятника равен производной площади, ограниченной фазовой траекторией $\dot{\theta}^2/2 - \cos\theta = E$ по энергии E.

9. Частицы массы 1 начинают двигаться с нулевой скоростью одновременно изо всех точек оси x под действием силового поля $F = \sin x$. Через какое время частицы начнут сталкиваться?

Решения можно найти в следующих книгах:

1. *В.И.Арнольд*. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984.

2. *В.И.Арнольд*. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974.

Ответы

1. $x = e^i/\left(1+e^i\right)$. **2.** Нет. **4.** Нет.

6. $T \approx 2\pi\left(1+\dfrac{a^2}{16}+\ldots\right)$. **7.** ∞. **9.** $\pi/2$.

(Начало см. на с. 21)

ком состоянии совершает колебания (их называют «нулевые колебания»). Кинетическая и потенциальная энергия этих колебаний порядка $\hbar\omega$. При этом среднее значение координаты осциллятора равно нулю, а среднее значение квадрата координаты дается приведенной выше формулой для q_0^2. Это замечательное свойство квантовых осцилляторов хорошо проверено на опыте и играет важную роль в современной физике.

Если рассмотреть звуковые колебания в твердом теле как набор квантовых осцилляторов, то мы получим, что при абсолютном нуле температуры атомы твердого тела не неподвижны, а совершают нулевые колебания. И этот факт был подтвержден опытами по рассеянию света при низких температурах! Если мы будем рассматривать электромагнитные волны, которые могут распространяться в пустом пространстве, как набор осцилляторов, то мы придем к заключению, что в пустоте, даже когда в ней нет ни частиц, ни квантов, должны происходить нулевые колебания электромагнитного поля. И эти колебания также были обнаружены на опыте! Но это уже более сложный вопрос, который требует подробного обсуждения.

Понимание возникает в процессе работы. Мы ввели без объяснения несколько непонятных слов: квантование, волновой процесс, связанный с частицей, квантовый осциллятор и т.д. И начали действовать, не очень их понимая. Тем не менее мы нашли, как зависит энергия атома водорода от квантового числа n; узнали, что квантовый осциллятор в наинизшем энергетическом состоянии колеблется, и даже стали применять результаты квантования осциллятора к такому объекту, как колебания электромагнитного поля в пустоте. И в результате этих действий возникло хотя бы частичное понимание.

Итак, понимание возникает в процессе работы. Ведь если бы мы попытались добиться полного понимания до того, как начали наши простые вычисления, ничего бы не получилось. Понимание возникает не скачком, а по мере продвижения в работе. И наоборот, работа продвигается по мере углубления понимания.

Для того чтобы достичь более глубокого понимания, надо самому решать задачи в данной области физики. Пассивное изучение дает только слабое представление о тех красотах, которые открываются при самостоятельной работе.

Избранные задачи по математике и физике

М1. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 миллионов избирателей, из которых только один процент (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. Мирафлорес, естественно, хочет быть избранным, но, с другой стороны, он хочет, чтобы выборы казались демократическими. «Демократическим голосованием» Мирафлорес называет вот что: все избиратели разбиваются на несколько равных групп, затем каждая из этих групп вновь разбивается на некоторое количество равных групп, затем эти последние группы снова разбиваются на равные группы и так далее; в самых мелких группах выбирают представителя группы – выборщика, затем выборщики выбирают представителей для голосования в еще большей группе и так далее; наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы, как он хочет, и инструктирует своих сторонников, как им голосовать. Сможет ли он так организовать «демократические выборы», чтобы его избрали президентом? (При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

XXXII Московская математическая олимпиада

М233*. В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма – число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее – 1973 раза. Сколько раз будет написано число 1973?

Г.Гальперин

М365. а) Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их кубов быть больше единицы?

б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых меньше единицы.

в) Может ли случиться, что ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится, а ряд $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots$, образованный кубами его членов, расходится?

(Напомним, что ряд $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ называется сходящимся, если последовательность чисел $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ имеет предел.)

М413*. Для каких положительных чисел a верно следующее утверждение: для любой функции f, определенной на отрезке $[0;1]$, непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что $f(0) = f(1) = 0$, уравнение $f(x+a) - f(x) = 0$ имеет решение?

а) Выясните сначала этот вопрос для случая $a = 1/2$.

б) Докажите, что для $a = 1/n$, где n – натуральное число, сформулированное утверждение верно.

в) Докажите, что для остальных положительных a оно не верно.

И.Яглом

М600. Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной из точек пересечения окружностей и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Докажите, что на плоскости, в которой лежат окружности, существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время одинаковы, если они едут: а) в одном направлении (против часовой стрелки); б) в разных направлениях.

Н.Васильев, И.Шарыгин

М818. Пусть какие-то k вершин правильного n-угольника закрашены красным цветом (остальные вершины – черные). Будем называть множество закрашенных вершин *равномерным*, если при любом m количества красных вершин в любых двух наборах из m

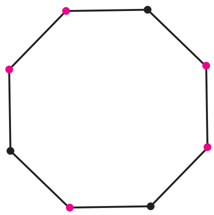


Рис. 1

последовательных вершин n-угольника совпадают или отличаются на 1 (на рисунке 1 приведен пример равномерного множества для $n = 8$, $k = 5$).

а) Постройте равномерные множества для $n = 12$, $k = 5$; $n = 17$, $k = 7$.

Докажите, что равномерное множество существует и единственно (с точностью до поворотов n-угольника), б) если n делится на k; в) для любых n и k ($k \le n$).

М.Концевич

М942. Числа $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ – числа первой группы в порядке возрастания, $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ – числа второй группы в порядке убывания. Докажите, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2 .$$

В.Произволов

М1000. В дугу AB вписана ломаная AMB, состоящая из двух отрезков, причем $AM > MB$. Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$ (рис.2).

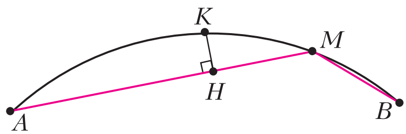


Рис. 2

Архимед

М1069. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня.

(Предполагается, что и до, и после обмена каждая семья живет в отдельной квартире.)

Н.Константинов, А.Шнирельман

М1397*. По контуру каждой грани выпуклого многогранника ползает муравей (таким образом, муравьев столько же, сколько граней), и все они движутся, обходя свою грань по часовой стрелке. Известно, что их скорости в любой момент времени не меньше 1 мм/ч . Докажите, что рано или поздно какие-то два муравья столкнутся.

А.Клячко

Ф12. Два одинаковых тяжелых стальных шарика вращаются на легких стержнях длиной l и $2l$ вокруг точек O_1 и O_2, расстояние между которыми равно $3l$ (рис.3). В начальный момент шарики находятся в точках A и B, имея скорости v и $2v$ соответственно. Сколько раз столкнутся шарики за время t? За какое время шарики столкнутся k раз? Удары шариков считать абсолютно упругими.

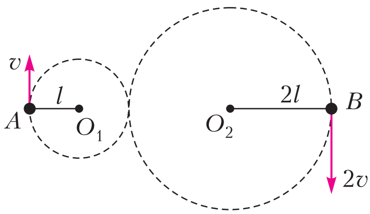


Рис. 3

Г.Коткин

Ф49. U-образная трубка заполнена водой. Из одного колена воздух удален, давление воздуха в другом колене при температуре 20 °C равно атмосферному. Оба конца трубки запаяны. Разность между уровнями воды в коленах равна 15 м. Какой будет разность уровней воды в коленах, если трубку нагреть до 100 °C ?

Б.Буховцев

Ф51. Фотографировать тигра с расстояния менее 20 метров опасно. Какой размер может иметь камера-обскура с отверстием диаметром 1 мм, чтобы тигр на фотографии был полосатым? Расстояние между полосами на шкуре тигра равно 20 см.

А.Стасенко

Ф54. Что покажет амперметр в схеме, изображенной на рисунке 4? Сопротивление амперметра очень мало.

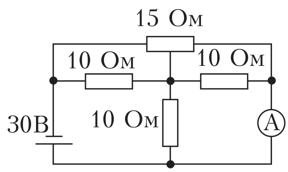


Рис. 4

А.Зильберман

Ф65. Пластины плоского конденсатора заряжены до потенциалов $+\varphi$ и $-\varphi$ относительно земли. Емкость конденсатора, образованного пластинами, равна C, а емкости конденсаторов, которые образуют каждая пластина с землей, равны C_1. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля между пластинами, если одну из них заземлить?

Л.Асламазов

Ф137. Инфракрасное излучение определенной длины волны поглощается метаном (CH_4). При нормальных условиях слой чистого метана толщиной 1 см поглощает 98% энергии излучения. Во сколько раз ослабится такое излучение при прохождении по вертикали атмосферы Земли? При расчете массовое содержание метана в атмосфере принять равным $1{,}4 \cdot 10^{-6}$.

С.Козел

Ф139. Футболист ударил по мячу, сообщив ему скорость v под углом α к горизонту, и попал в ближний нижний угол ворот. Если бы футболист ударил по мячу в том же месте футбольного поля и мяч полетел бы под тем же углом к горизонту, но со скоростью, на 5% большей скорости v, то он попал бы в верхнюю штангу ворот. Найдите скорость, с которой начинает двигаться мяч, если высота ворот $h = 2$ м, а угол $\alpha = 30°$.

И.Слободецкий

Ф154. Оцените, сколько капелек воды имеется в 1 $м^3$ тумана, если видимость составляет 10 м и туман оседает через 2 ч. Высота слоя тумана 200 м. Сила сопротивления воздуха, действующая на каплю воды радиусом R (м), движущуюся со скоростью v (м/с), равна $4{,}3Rv$ (Н).

П.Капица

Ф166. В расположенном горизонтально цилиндре (рис.5) с одной стороны от закрепленного поршня находится 1 моль идеального газа. В другой части цилиндра – вакуум. Пружина, расположенная между поршнем и стенкой цилиндра, находится в недеформированном состоянии. Цилиндр

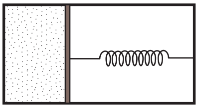


Рис. 5

теплоизолирован от окружающей среды. Поршень освобождают, и после установления равновесия объем, занимаемый газом, увеличивается вдвое. Как изменятся температура газа и его давление? Теплоемкости цилиндра, поршня и пружины пренебрежимо малы.

Е.Бутиков, А.Быков, А.Кондратьев

ФК3.[1] Предложите способ оценки энергии связи редколлегии «Кванта».

С.Кротов

[1] Эта задача была опубликована в специальном выпуске «Кванта» № 3′–1983, изданном в единственном экземпляре и посвященном 75-летию И.К.Кикоина.

Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением

А.Зильберман

Много интересных вопросов возникает в связи со свойствами источников, у которых зависимость напряжения от тока отличается от обычной зависимости $U = \mathcal{E} - rI$ (здесь $\mathcal{E}$ – ЭДС, r – внутреннее сопротивление источника). Некоторые из этих вопросов мы разберем на примере задачи Ф727:

Зависимость напряжения от тока для некоторого источника электрической энергии показана на рисунке 1. *Построй-*

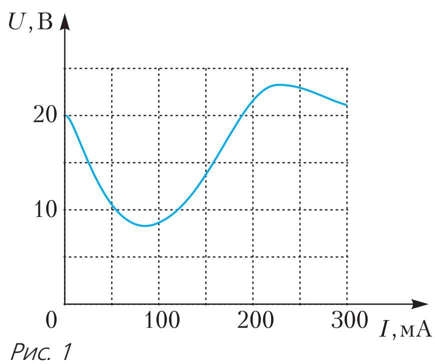


Рис. 1

Опубликовано в «Кванте» №7 за 1982 год.

те график зависимости напряжения на нагрузке, на которую замкнут источник, от сопротивления нагрузки.

Подключим к источнику резистор с сопротивлением R. Напряжение на нагрузке связано с током простым соотношением: $U_{\text{н}} = RI$. На том же рисунке, где изображена зависимость $U(I)$ напряжения источника от тока через него, нарисуем прямую $U_{\text{н}} = RI$. Точка пересечения графика $U(I)$ и прямой $U_{\text{н}} = RI$ даст нам искомые ток и напряжение. Для обычного источника, у которого напряжение на зажимах тем меньше, чем больше ток, никаких проблем больше не возникает – точка пересечения одна и результат определяется однозначно. А вот для необычного источника, у которого на некотором участке напряжение растет с ростом тока, есть область значений R, при которых точек пересечения целых три. Понятно, что ток не может иметь одновременно три значения; значит, с этой областью нужно разбираться отдельно – удобный графический способ нахождения тока в цепи тут явно не подходит.

Подключим к источнику сначала резистор с очень большим сопротивлением, а затем будем постепенно сопротивление уменьшать. Первоначальный ток в цепи будет очень малым, и при уменьшении сопротивления он будет возрастать. На

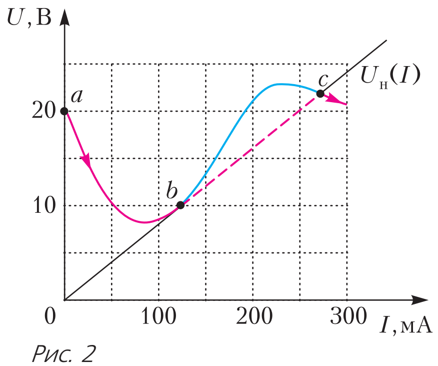


Рис. 2

рисунке 2 такому режиму соответствует участок ab, на котором значения U и $I(U)$ меняются от $U_a = 20$ В, $I_a = 0$ до $U_b \approx 10$ В, $I_b \approx 120$ мА. Каждая точка этого участка соответствует устойчивому состоянию (малые изменения тока в цепи приводят к изменениям напряжения, которые стремятся компенсировать изменения тока; это характерно для всех «нормальных» цепей). При дальнейшем уменьшении R режим меняется скачком от U_b, I_b до $U_c \approx 22$ В, $I_c \approx 260$ мА, а затем – снова «устойчивый» режим (справа от точки c по кривой $U(I)$).

Если мы начнем с малых сопротивлений резистора, то при увеличении R мы дойдем до точки d (рис.3), затем – скачок от $U_d \approx 23$ В, $I_d \approx 210$ мА до $U_e \approx 8$ В, $I_e \approx 80$ мА и снова по кривой $U(I)$ до точки a.

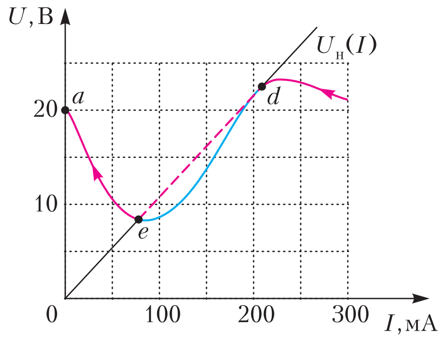


Рис. 3

А что если взять резистор, сопротивление которого лежит в области 80 Ом < < R < 100 Ом (значению $R \approx 80$ Ом соответствуют точки b и c на рисунке 2, значению $R \approx 100$ Ом – точки e и d на рисунке 3), и подключить его к источнику? Каковы будут напряжение и ток в цепи? Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать такие параметры цепи, как индуктивность проводов, емкость между выводами резистора. Если, например, индуктивность проводов большая (длинные провода), а емкость между проводами маленькая, то в момент подключения резистора к источнику ток будет малым (влияние индуктивности), а затем будет нарастать – режим в цепи будет устанавливаться в соответствии с рисунком 2. Если велика емкость между подключаемыми к источнику проводами, а индуктивность проводов маленькая, то в первый момент ток будет большим и станет уменьшаться (по мере зарядки емкости) – случай, соответствующий рисунку 3.

Интересно отметить, что, используя подобные источники, можно получить незатухающие колебания в цепи. Правда, для этого нужен второй источник. У обычного источника, напряжение на котором падает с ростом потребляемого тока, можно определить величину внутреннего сопротивления по отношению изменений напряжения на выходе к изменениям тока: $r = -\frac{\Delta U}{\Delta I}$. В нашем случае на некотором участке – на участке bd зависимости $U(I)$ – внутреннее сопротивление источника получается отрицательным. При этом участок bd настолько крут, что даже полное сопротивление цепи $(r+R)$ оказывается отрицательным. Отсюда и неустойчивость «средней» точки, и другие «странности» (в том числе – возможность получения незатухающих колебаний: «отрицательное» сопротивление может компенсировать потери в колебательной системе; естественно, все это происходит без нарушения закона сохранения энергии – за счет энергии источника).

Как же удается получить всю кривую зависимости $U(I)$, если как при уменьшении, так и при увеличении сопротивления нагрузки из кривой «выпадает» участок bd? При помощи маленькой хитрости: возьмем второй источник, его «минус» подключим к «плюсу» нашего источника, а нагрузку R включим между оставшимися выводами. Это позволит нам при той же величине тока подобрать резистор с большим, чем R, сопротивлением так, чтобы полное сопротивление в цепи было всюду положительным. (На графике такая прямая уже не выходит из начала координат и пересекает кривую $U(I)$ только в одной точке.)

Зависимость, подобная приведенной в условии этой задачи, – вовсе не редкость. Она может возникнуть, например, при попытке сделать стабилизатор напряжения, у которого выходное напряжение не меняется при изменении тока нагрузки. Чаще всего этого достигают путем компенсации уменьшения напряжения (компенсационный стабилизатор). Стоит только немного ошибиться – сразу в какой-то области наступит перекомпенсация, и напряжение начнет увеличиваться с ростом потребляемого тока. (Радиолюбители знают, что стабилизаторы часто склонны к самовозбуждению; причины этого явления мы обсудили выше.)

Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым

Мы находимся в старом деревянном доме в деревне Комаровка под Москвой, где Андрей Николаевич обычно проводит конец недели. Светлая, скромно обставленная комната. В одном из углов старый, но качественный проигрыватель со специальными полками для пластинок. Стены заставлены стеллажами с книгами. В середине комнаты большой стол с множеством книг, оттисков статей, рукописей, художественных альбомов. Андрей Николаевич сидит у окна за небольшим письменным столом. Рядом с пишущей машинкой и аккуратно сложенными исписанными листами бумаги стоит магнитофон, на который записывается наша беседа. Стенограмму этой беседы мы и предлагаем вашему вниманию.

– Андрей Николаевич, часто приходится слышать о возрастающей специализации науки. В то же время известно, что вы занимались такими далекими друг от друга областями математики, как теория вероятностей и алгебраическая топология, математическая логика и теория динамических систем. В чем, по-вашему, будущее науки – в универсальности или специализации?

– Математика велика. Один человек не в состоянии изучить все ее разветвления. В этом смысле специализация неизбежна. Но в то же время математика – единая наука. Все новые и новые связи возникают между ее разделами, иногда самым непредвиденным образом. Одни разделы служат инструментами для других разделов. Поэтому замыкание математиков в слишком узких пределах, должно быть, гибельно для нашей науки. Положение облегчается тем, что работа в области математики, в принципе, коллективна. Должно быть некоторое количество математиков, которые понимают взаимные связи между самыми различными областями математики. С другой стороны, можно работать с большим успехом и в какой-нибудь совсем узкой ветви математики. Но в этом случае надо еще, хотя бы в общих чертах, понимать связи между своей специальной областью исследования с областями смежными, понимать, что, по существу, научная работа в математике – коллективная работа.

– Что вы можете сказать о соотношении и связях прикладной и чистой математики?

– Прежде всего, нужно заметить, что само различие между прикладной и чистой математикой чрезвычайно условно. Вопросы, которые, казалось бы, принадлежат к чистой математике и не имеют применений, очень часто совершенно неожиданно оказываются важными для разных приложений. С другой стороны, занимаясь прикладной математикой, ученый почти неизбежно наталкивается на смежные вопросы, решающиеся теми же методами, привлекающие его своей логической красотой, но, собственно говоря, непосредственных приложений уже не получающие. Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту. Несомненно, что математики должны, это их долг, заниматься всеми теми вопросами, которые настоятельно навязываются вопросами практики. Если смежные вопросы, пусть сразу применений не имеющие, являются привлекательными хотя бы в силу красоты и естественности возникающих задач, ими, конечно, тоже нужно заниматься.

Опубликовано в «Кванте» №4 за 1983 год (к 80-летию А.Н.Колмогорова).

– Норберт Винер пишет в своей автобиографической книге, что перестал заниматься функциональным анализом, когда почувствовал, что «Колмогоров наступает мне на пятки». А как вы относитесь к конкуренции в математике?

– Заявление Винера мне не совсем понятно. В функциональном анализе я сделал немного. Самая интересная моя работа по функциональному анализу называется «Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве».

Что касается конкуренции, то конкуренция может быть дружеской, тогда она мало отличается от сотрудничества. Тесное содружество, когда два математика одновременно и параллельно думают над одной и той же проблемой, порой бывает очень продуктивным. Но при этом иногда бывает и так, что участие одного из сотрудников практически оказывается излишним и тогда ему разумно без обиды отойти в сторону.

– Всегда ли математика была вашим основным увлечением? Когда вы окончательно выбрали математику как профессию?

– Нет, как это часто бывает, пути моего развития были более извилистыми. С раннего детства было известно, что я умею хорошо считать и что меня интересуют математические задачи арифметического характера; я сравнительно рано познакомился и с началами алгебры. Но все это относится к очень раннему возрасту. Несколько позднее, в средних классах школы, победили уже совсем другие увлечения – в частности, историей. Возврат к математике произошел в самых последних классах средней школы. Когда я кончил среднюю школу, то долго колебался в выборе дальнейшего пути. В первые студенческие годы, кроме математики, я занимался самым серьезным образом в семинаре по древнерусской истории профессора С.В.Бахрушина. Не бросал мысль о технической карьере, почему-то меня увлекала металлургия, и, параллельно с университетом, я поступил на металлургическое отделение Химико-технологического института имени Менделеева и некоторое время там проучился. Окончательный выбор математики как профессии, собственно говоря, произошел, когда я начал получать первые самостоятельные научные результаты, т.е. лет с восемнадцати-девятнадцати.

– Когда обычно проявляются способности к математике? Всегда ли, как у вас, в раннем возрасте?

– Я довольно много преподавал в средней школе. У меня сложилось такое впечатление, что интерес к математике в средних классах, в возрасте двенадцати-тринадцати лет, часто оказывается временным и совсем проходит к старшим классам. Особенно часто это бывает у девочек. С теми школьниками, которые увлечены математикой в возрасте 13–14–15 лет, по-моему, стоит работать. При умелом культивировании их способности постепенно развиваются и, как правило, уже не теряются. Бывает, конечно, и очень много исключений. Разумеется, серьезный интерес к математике может проявиться и позже.

– Какие математики старшего поколения оказали на вас наибольшее влияние?

– В студенческие годы я был учеником Николая Николаевича Лузина. Кроме него большое влияние оказали на меня Вячеслав Васильевич Степанов, Александр Яковлевич Хинчин, Павел Сергеевич Александров и другие математики их поколения.

– Что вам хотелось бы сказать о своих учениках и кого из них вы хотели бы упомянуть?

– Мне повезло на талантливых учеников. Многие из них, начав работу вместе со мной в какой-нибудь области, потом переходили на новую тематику и уже совершенно независимо от меня получали замечательные результаты. Выделить из них наиболее заслуживающих упоминания было бы трудно.

Скажу только в виде шутки, что в настоящее время один из моих учеников управляет земной атмосферой, а другой – океанами.

– Андрей Николаевич, каков ваш режим дня?

– Естественно, в течение моей достаточно длинной жизни режим дня в разные ее периоды был различным. Опишу, пожалуй, только тот режим дня, который мы с Павлом Сергеевичем Александровым установили для себя на те 3–4 дня в неделю, которые мы проводили за городом, под Москвой, в деревне Комаровка.

День начинался в 7 часов утра. Первый час был посвящен гимнастике, пробежке. В 8 часов мы завтракали и принимались за работу за столом – с пишущей машинкой или без нее. В час или два часа дня был полдник, состоящий из молока или кефира с хлебом. После полдника мы еще немного работали, но обычно отправлялись на большую прогулку пешком или – зимой – на лыжах, до 4 часов дня. Потом на полчаса мы укладывались спать. В 5 часов был обед. После обеда мы иногда еще занимались работой, обычно – второстепенной: переписывание или тому подобное. Вечер посвящался чтению, музыке, приему гостей. Перед сном мы любили еще делать небольшую прогулку. Укладывались спать около 10 часов.

Но, конечно, когда работаешь и начинает получаться решение какой-либо важной проблемы, все отступает на задний план, никакого распорядка дня уже не бывает.

– Вы, как и многие математики, любите серьезную музыку. Расскажите, почему.

– Ваше замечание о многих математиках, увлекающихся серьезной музыкой, мне кажется правильным. Если прийти в концертный зал, особенно в Малый зал Московской консерватории, то вы там увидите непропорционально много математиков. По-видимому, между математическим творчеством и настоящим интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи. Но выяснить и объяснить эти связи мне представляется довольно трудным. Замечу, впрочем, что мой друг Павел Сергеевич Александров рассказывал, что у него каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений связывались с тем или иным конкретным музыкальным произведением.

Среди любимых композиторов назову, в первую очередь, Моцарта, Шумана, ну и, конечно, величайших музыкантов – Баха, Бетховена.

– Лингвисты и литературоведы обратили внимание на ваши публикации по стиховедению. Что вы можете сказать об этом – менее обычном – сочетании: математика и поэзия?

– Мне хотелось бы разделить этот вопрос на два, так как мое увлечение поэзией имеет такой же непроизвольный, стихийный характер, как и у людей, не занимающихся теоретическим исследованием стиха. Любимые мои поэты – это Тютчев, Пушкин, Блок. Что же касается моих научных работ по метрике и ритмике русского стиха, то они действительно обратили на себя внимание специалистов-литературоведов, но все-таки это довольно специальная область исследования, интересоваться которой совершенно не обязательно всякому.

– Занимаетесь ли вы спортом? Каким?

– Состязательным спортом я никогда не занимался. Если не ошибаюсь, я только три раза в жизни участвовал в гонке на 10 километров на лыжах.

Но я всегда очень любил большие прогулки пешком и на лыжах, совершал длинные путешествия на байдарке или на лодке. Очень люблю плавание, походы в горах. Во всех этих занятиях я ценю не только их пользу для здоровья, но ту радость общения с природой, которую они приносят.

Всегда любил купание в морском прибое. В солнечные мартовские дни люблю делать большие лыжные пробеги в одних шортах. Во время таких мартовских лыжных пробегов люблю выкупаться посреди сияющих на солнце сугробов в только что вскрывшейся ото льда речке. Впрочем, я не советую обязательно подражать мне во всем этом – можно просто записаться в какую-нибудь привлекающую вас спортивную секцию.

– Андрей Николаевич, что бы вы хотели пожелать нашим читателям?

– Я сам являюсь ученым, и, конечно, в первую очередь, я желаю нашим читателям внести тот или иной вклад в науку, большой или хотя бы маленький. Замечу, впрочем, что в случае если все наши читатели принялись бы писать самостоятельные научные работы, то научные журналы не выдержали бы такого натиска. Поэтому я выскажу и более скромное пожелание – чтобы школьное увлечение математикой пригодилось вам и в дальнейшей жизни. В «Кванте» мы как раз стараемся вам показать, как разнообразны приложения математической науки.

Беседовал А.Сосинский

Избранные задачи

1. Число БАОБАБ делится на 101. Какое это число?

А.Савин

2. Каждая грань кубика разделена на 4 квадрата. Каждый квадрат окрашен в один из трех цветов – синий, желтый или красный – так, что квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько может быть синих квадратов?

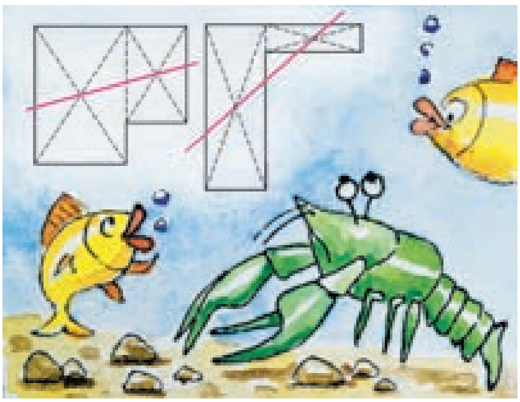
В.Произволов

3. Известно, что любой дурак считает себя умным, зато всех остальных – дураками. Среди умных могут быть такие, кто считает себя дураком, зато про всех остальных точно знает, кто умный, а кто дурак (как и тот умный, который считает себя умным). Опросы жителей Страны Чудаков позволили точно определить, кто из них умный, а кто дурак. Есть ли в этой стране хоть один умный?

А.Жуков

4. На рисунке показаны два шестиугольника, каждый из которых Рак своими клешнями пытается разделить прямой линией на две части одинаковой площади. Ему удалось разделить первый шестиугольник, проведя прямую линию через центры двух прямоугольников, однако второй шестиугольник этим способом делится не на 2, а на 3 части. Тем не менее, его можно разделить и на 2 части. Помогите Раку это сделать.

И.Акулич



Иллюстрации Д.Гришуковой

Про умножение

А.САВИН

Кому как, а мне таблица умножения давалась с трудом. Конечно, «дважды два – четыре» и «пятью пять – двадцать пять» запомнились легко, а вот «семью восемь» или «девятью шесть» никак не укладывались в голове. «Трудные» произведения я вычислял примерно так: «пятью восемь – сорок, да дважды восемь – шестнадцать, значит, всего пятьдесят шесть». Но учитель требовал беглых ответов, и таблицу приходилось «долбить» наизусть. Это знакомо не только мне одному – недаром сотни лет школяры разных стран, каждый на своем языке, называли ее «долбица умножения». (Между прочим, среди моих учеников – студентов физтеха – встречаются такие, кто знает ее весьма нетвердо.)

В конце концов таблицу я выучил. Впоследствии выяснилось, что это было нужно не учителю, а мне самому: с ее помощью оказалось возможным перемножать любые числа, причем довольно быстро.

Так я прожил много лет в полной уверенности, что без таблицы умножения числа быстро не перемножить. Эту уверенность подкрепляло то, что я узнавал о способах умножения в Индии, Китае, в Европе эпохи Возрождения…

И вот однажды я наткнулся на «русский крестьянский способ умножения», который был распространен в России два столетия назад, и с изумлением обнаружил, что русские крестьяне умели перемножать числа *без помощи таблицы умножения!* Им достаточно было уметь умножать и делить на два, а также складывать числа.

Вот как они это делали.

Напишем одно из чисел слева, второе – справа на одной строчке. Левое число будем делить, правое – умножать на два, а результаты записывать в столбик так, как показано на рисунке 1. Если в какой-то момент придется делить на два нечетное число, остаток отбросим. Когда от левого числа останется единица, вычеркнем все те строки, в которых слева стоят четные числа. Все, что осталось справа, сложим. Полученное число – произведение тех двух чисел, с которых мы начали!

13	17
~~6~~	~~34~~
3	68
1	136
	221

Рис. 1

Сначала я, конечно, не поверил прочитанному и честно перемножил 13 и 17 по предложенному рецепту. Получился правильный ответ: 221. Я поменял числа местами и перемножил их снова. Ответ не изменился – опять 221 (рис.2).

17	13
~~8~~	~~26~~
~~4~~	~~52~~
~~2~~	~~104~~
1	208
	221

Рис. 2

Я отказывался верить своим глазам: уж слишком это походило на фокус вроде известных примеров неправильных действий, дающих верные результаты, – таких, как изображенное на рисунке 3 «сокращение» дробей.

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4},\quad \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Рис. 3

Но метод оказался абсолютно правильным!

Прежде чем читать дальше, попробуйте таким способом перемножить несколько пар чисел, чтобы освоиться с ним и набрать некоторый запас уверенности в его справедливости. Посчитали? А теперь я покажу, что это действительно способ умножения, всегда дающий верный результат.

В двух предыдущих номерах нашего журнала были опубликованы статьи И.Яглома «Системы счисления» и «Две игры со спичками», в которых подробно рассказы-

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1992 год.

валось, в частности, и о двоичной системе счисления. Всякое число в ней записывается с помощью нулей и единиц: $32 = 100000_2$, $13 = 1101_2$, $17 = 10001_2$. Маленький «хвостик» – цифра 2, приписанная к числу,– показывает, что это число записано в двоичной системе счисления. Расшифровываются эти записи так:

$$32 = 100000_2 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + {} + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0,$$

$$13 = 1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1,$$

$$17 = 10001_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1.$$

Запишем под каждой цифрой двоичного представления числа 13 левую колонку чисел, получившуюся при умножении русским крестьянским способом. То же самое проделаем и с числом 17 (рис.4). Заметили

1	1	0	1
1	3	6	13

1	0	0	0	1
1	2	4	8	17

Рис. 4

закономерность? Да, да! Если в двоичной записи числа на некотором месте стоит 1, то под ним оказывается нечетное число, а если 0 – то четное. Попробуйте доказать это.

А я переформулирую теперь правило умножения по-крестьянски. В правом столбце записываются числа, равные второму сомножителю, умноженному на 2 в степени на единицу меньшей, чем номер строчки, в которую мы записываем это число. Затем результаты умножаются на 1, если число слева в той же строке нечетно, и на ноль, если четно. Для наглядности я предлагаю добавить еще один столбец, посередине, и записывать в него остаток от деления на 2 числа, стоящего слева в той же строке (рис.5). Таким образом, при умножении по-крестьянски происходит, по сути, перемножение построчно среднего и правого столбцов, а затем сложение

13	1	17
6	0	17×2
3	1	17×2^2
1	1	17×2^3
		221

Рис. 5

полученных результатов. В примере с тринадцатью и семнадцатью получаем:

$$17\cdot 1\cdot 1 + 17\cdot 0\cdot 2 + 17\cdot 1\cdot 2^2 + 17\cdot 1\cdot 2^3 = {} = 17\left(1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3\right) = {} = 17\cdot 1101_2 = 17\cdot 13$$

или

$$13\cdot 1\cdot 1 + 13\cdot 0\cdot 2 + {} + 13\cdot 0\cdot 2^2 + 13\cdot 0\cdot 2^3 + 13\cdot 1\cdot 2^4 = {} = 13\left(1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^4\right) = {} = 13\cdot 10001_2 = 13\cdot 17.$$

Выходит, русский крестьянский способ умножения основан на представлении одного из сомножителей в двоичной системе счисления? Не правда ли, просто и красиво?

А как будет работать такой способ умножения с большими числами, скажем такими: 567 и 3984? Посмотрим. На рисунке 6 справа приведено привычное нам «табличное» умножение. Там приходится складывать меньше чисел, но каждое из них получено куда более сложным способом, чем в левом варианте на этом же рисунке.

567	3984
283	7968
141	15936
~~70~~	~~31872~~
35	63744
17	127488
~~8~~	~~254976~~
~~4~~	~~509952~~
~~2~~	~~1019904~~
1	2039808
	2258928

$$\begin{array}{r} 567 \\ \underline{3984} \\ 2268 \\ 4536 \\ 5103 \\ \underline{1701} \\ 2258928 \end{array}$$

Рис. 6

Получается, что, выигрывая в простоте вычислений, мы проигрываем во времени, так что привычное умножение, пожалуй, лучше…

«Нет! – скажут те, кто до сих пор не в ладах с таблицей умножения.– Ведь при крестьянском методе не нужно зубрить таблицу, а это кое-что значит!» В пользу таблицы умножения я приведу такой довод: пожалуй, накладно будет хватать бумагу и ручку, чтобы подсчитать, сколько стоят 8 пирожков по 70 копеек за штуку, или лезть для этого в сумку за тетрадью, на обложке которой помещена «таблица Пифагора» (рис.7).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Рис. 7

Она действительно такая древняя – более двух тысяч лет назад пифагорейцы умножали числа с ее помощью. (Недавно ташкентский математик А.Азамов заметил любопытное ее свойство: если четыре числа этой таблицы расположены в вершинах квадрата, центр которого – тоже число таблицы Пифагора, то число в центре квадрата равно среднему арифметическому чисел в его вершинах. Так, для чисел, выделенных на рисунке 7, имеем: $42=(25+48+63+32)/4$.)

За долгие тысячелетия развития математики было придумано множество способов умножения чисел. Итальянский математик конца XV – начала XVI веков Лука Пачиоли в своем трактате об арифметике приводит 8 различных способов умножения. Вот два из них, на мой взгляд, наиболее интересные.

В первом, который носит название «маленький замок» (рис.8), цифры верхнего числа, начиная со старшей, поочередно умножаются на нижнее число и записываются в столбик с добавлением нужного числа нулей, а затем результаты складываются. Преимущество этого метода перед обычным в том, что уже с самого начала определяются цифры старших разрядов, а это бывает важно при прикидочных расчетах.

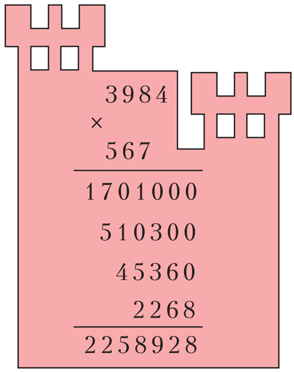


Рис. 8

Второй способ носит не менее романтическое название: «ревность» (или «решетчатое умножение»). Рисуется решетка, в которую затем вписывают результаты промежуточных вычислений (на самом деле – нужные числа из таблицы умножения). Эта решетка представляет собой прямоугольник, разбитый на квадратики, каждый из которых разделен диагональю (рис.9). «Такая решетка напоминает решетчатые ставни-жалюзи, которые вешались на венецианские окна, мешая уличным прохожим видеть сидящих у окна дам и монахинь»,– пишет Лука Пачиоли.

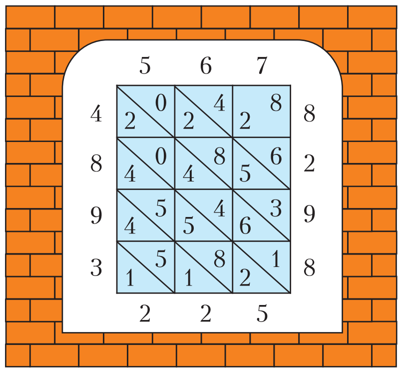


Рис. 9

Перемножим этим способом числа 567 и 3984. Сверху таблицы запишем один сомножитель, а слева – другой. Затем в каждой клетке запишем произведение цифр сомножителей, стоящих с ней в одной горизонтали и в одной вертикали. Десятки записываются в левых нижних треугольниках, а единицы – в правых верхних. После заполнения таблицы складываются числа вдоль направлений проведенных диагоналей, результат записывается справа и снизу от таблицы. Этот способ хорош вычислительной простотой: клетки решетки заполняются прямо из таблицы умножения, а на долю вычислителя остается только сложение.

Остальные шесть способов, описанные Лукой Пачиоли, как и первые два, основаны на таблице умножения. Существует множество других способов умножения чисел с применением таблицы, придуманных в разное время и в разных странах. Но другого метода, кроме русского крестьянского, который обходился бы без нее, похоже, не существует.

Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...

А.БУЗДИН, С.КРОТОВ

Если все краски радуги вместе смешать, то... получится черная грязь.

Вреднюга (из детского мультфильма)

Не будем чересчур строгими по отношению к выводу Вреднюги про краски, а рассмотрим все по порядку, поскольку физически чистый эксперимент – это вещь достаточно тонкая...

Сколько существует на свете разных цветов? Откуда вообще берутся разные цвета? Эти и многие другие вопросы издавна занимали любознательных людей. Большой вклад в создание науки о цвете внес великий Ньютон. Он наблюдал разложение солнечного (белого) света при прохождении его через стеклянную призму в так называемый спектр (от латинского spectrum). Получающиеся при этом цвета в точности соответствуют цветам радуги. Призма позволила Ньютону получить радугу в «лабораторных» условиях. Вот они, цвета радуги: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый. Посмотрите еще раз на заглавие статьи. Мы воспользовались шуточной фразой, помогающей запомнить последовательность цветов в солнечном спектре (как видите, и в нашей шутке есть доля правды). Наверняка кто-то из вас вспомнит еще одно мнемоническое правило – фразу «каждый охотник желает знать, где сидит фазан».

Именно благодаря опытам Ньютона в конце XVII века было установлено, что белый свет представляет собой смесь из различных цветов. (В частности, Ньютон показал, что если разложенный в спектр белый свет смешать, то опять получится белый свет.) Прошло много времени, пока ученые осознали, что свет – это распространяющиеся в пространстве колебания связанных друг с другом электрических и магнитных полей, иначе говоря – электромагнитные волны. Наиболее привычный пример такого рода волн – радиоволны. Было доказано, что природа света и радиоволн – одна и та же, они отличаются лишь частотой колебаний. Частота радиоволн в тысячи раз более низкая, чем у световых. Каждому цвету отвечает определения частота колебаний. Если воспользоваться аналогией с музыкальными инструментами, то красный цвет отвечает «басам», а фиолетовый – высоким нотам.

Скорость распространения электромагнитных волн $c = 300000$ км/с. Она во мно-

Опубликовано в «Кванте» №12 за 1987 год.

го тысяч раз больше скорости звука, так что радиослушатель, сидящий дома во Владивостоке около радиоприемника, слышит голос певца на концерте, транслируемом из Москвы, раньше, чем слушатель, сидящий в дальнем ряду концертного зала.

Приведенное значение скорости света ($c = 3 \cdot 10^5$ км/с) относится к вакууму. При распространении света в прозрачном веществе скорость оказывается меньшей. Особый интерес представляет тот факт, что при прохождении через вещество свет разных цветов распространяется с разными скоростями. Это явление называется дисперсией, и именно благодаря дисперсии призма разлагает белый свет в цветной спектр.

Итак, из белого света можно получить все цвета радуги. А что означают разные цвета на картинках в этом журнале? Стоит вам прихватить с собой журнал в темную комнату, как все цвета вообще пропадут, картинки станут просто серыми – сами по себе они не «светятся», какого бы цвета ни были. Чтобы видеть их разноцветными, их необходимо освещать. При этом падающий на страницу свет частично поглощается, частично рассеивается, а видим мы именно рассеянные световые лучи.

Очень важно, что разные вещества (в силу особенностей строения их молекул) обладают избирательностью к цвету – они по-разному поглощают и рассеивают свет различных участков спектра. Охра потому нам и кажется желтой, что из падающего на нее белого света поглощаются почти все лучи, кроме желтого цвета. Или вспомните про... помидор. На разных стадиях созревания он преимущественно рассеивает сначала зеленые лучи, потом – красные. В этом проявляются изменения молекулярного строения вещества помидора. Кстати, не случайно в химии цвет – важная характеристика вещества.

Пришло время оставить заботы земные и... воспарить. Действительно, вряд ли найдется человек, которого хоть раз в жизни не увлекла загадочная игра небесных красок. «Цвет небесный – синий цвет...»,– написал замечательный грузинский поэт Нико Бараташвили. Но зададимся вопросом – безупречна ли физически упомянутая строчка?

Обычно голубизну неба объясняют рассеянием света в атмосфере. Однако почему тогда ночное небо даже при полной луне не бывает голубым? Или почему разные участки неба окрашены в синий цвет по-разному – одни более ярко, другие менее ярко? А если обратиться к заходу солнца? Внимательный физик, наблюдавший заход солнца, отметил, что сначала западная часть неба приобретает желтый или оранжевый оттенок; затем, когда солнце становится огненно-красным, свечение неба меняется от желто-оранжевого до ярко-зеленого; наконец, примерно до высоты 25° над горизонтом небо окрашивается в розовый цвет.

Поскольку причиной всех перечисленных цветовых коллизий является рассеяние солнечного света в атмосфере, остановимся более подробно на этом процессе.

Объяснение особенностей окраски неба принадлежит английскому физику У.Рэлею. В общих чертах суть дела такова. Цвет неба определяется зависимостью рассеяния света от частоты последнего. Приходящая от солнца электромагнитная волна «раскачивает» электроны, входящие в состав молекул воздуха. Наиболее сильное воздействие на электроны оказывают лучи синей части спектра. Таким образом, из пришедшей световой волны электроны молекул воздуха «забирают» колебания синей части спектра. Но, придя в вынужденное колебательное движение, электроны отдают назад взятую у волны энергию. Однако отдают они эту энергию уже во всех направлениях, а не только в направлении падения первоначальной волны от солнца. Этот процесс и представляет собой рассеяние света.

Существенным для объяснения рассеяния света в атмосфере является неравномерность распределения молекул воздуха в атмосфере – постоянно имеющие место флуктуации плотности воздуха. При равномерном распределении молекул в пространстве рассеяние было бы совершенно иным – небо просто-напросто было бы черным.

Итак, сильнее всего молекулы воздуха рассеивают синюю часть спектра, и поэтому участки неба, которые мы видим в рассеянном свете, кажутся нам голубыми.[1] Чем сильнее удалены от солнца соответствующие участки небосвода, тем менее яркими они будут нам казаться. Причина состоит в том, что чем больший путь в атмосфере проходят солнечные лучи, тем меньшая в них доля приходится на синюю составляющую. Теперь, наверное, вам понятно, почему говорят «красно солнышко»? Прямые солнечные лучи по пути к нам «теряют» синюю составляющую, и преимущественную долю приходящего к наблюдателю излучения составляет именно красно-желтая часть спектра.

Очевидно, что дым, пыль и другие мелкие частицы, содержащиеся в воздухе, существенным образом влияют на рассеяние света в атмосфере. Известно, что после больших извержений вулканов восходы и заходы солнца порой играют удивительными красками – солнце и луна могут даже стать синими. Приведем описание последствий катастрофического извержения вулкана Кракатау в 1883 году, которое дает в своей книге «Занимательная геология» замечательный русский ученый В.А.Обручев: «Мелкий пепел затемнял солнце в Японии и в других местах на расстоянии свыше 3000 километров. Этот пепел, долго плававший в атмосфере, обусловил синеватый цвет солнца и луны в Африке и на островах Тихого океана и замечательные красные зори в конце 1883 года и в начале 1884 года, наблюдавшиеся по всей земле».

Синяя окраска солнца и луны в данном случае обуславливается рассеянием света на атмосферных аэрозолях размером 0,4–0,9 мкм, т.е. размером, сравнимым с длиной волны видимого света. Атмосферные аэрозоли указанных размеров образуются путем осаждения на твердых частицах дыма, пепла и т.д. при вулканических извержениях и крупных лесных пожарах. Именно вследствие своего относительно большого размера они рассеивают свет красной части спектра сильнее, чем синей. Это рассеяние связывают с именем немецкого ученого Ми. При наблюдении солнца и луны сквозь такой аэрозоль они видятся синеватыми – красная составляющая белого света рассеивается, и до нас доходит только синий свет. Итак, оттенки цветов, окрашивающих небесный свод, обусловлены в конкретной ситуации комбинацией рэлеевского рассеяния с рассеянием света на мелких частицах.

«Голубые горы, голубые дали, голубые город» – все эти поэтические сочетания слов обычно используют в качестве символов первозданности, необыкновенной чистоты, загадочности. Самое удивительное состоит в том, что и здесь не обошлось без физики. Так, иногда над покрытой зеле-

[1] Может возникнуть вопрос: почему голубыми, а не фиолетовыми? Дело в том, что надо еще принимать во внимание специфику восприятия цветов человеческим глазом и тот факт, что в солнечном свете фиолетовых лучей «меньше», чем синих.

нью открытой местностью, не слишком загрязненной вследствие человеческой деятельности, возникает очень красивая таинственная голубая дымка. В литературе часто упоминаются голубые горы Кавказа, а Голубые горы в Австралии знамениты именно своей голубой дымкой. Голубой цвет «дымки» обусловлен рассеянием света на мельчайших частицах, размер которых много меньше длины волны видимого света. Такими частицами могут быть органические макромолекулы, испускаемые растительностью, а также мельчайшие частицы, срываемые с острых частей растений электрическим полем земли. Итак, в местах скопления мельчайших частиц возникает добавочный эффект рассеяния синей части спектра.

Завершая статью, предлагаем читателю сюжеты для самостоятельного рассмотрения.

1. Почему издалека новогодняя елка (скажем, стоящая на главной площади вашего города) в вечернее время кажется красной, хотя она освещена огоньками разного цвета?

2. Если вам доведется в новогоднюю ночь сидеть у костра, не забудьте поэкспериментировать и может быть блеснуть перед окружающими, задав им следующий вопрос. Почему внизу на фоне деревьев дым костра кажется синим, однако над верхушками деревьев (на фоне светлого неба) он выглядит желтым?

3. Капнув несколько капель молока в стакан с водой, посмотрите сквозь него на светящуюся лампочку. Лампочка покажется красновато-желтоватой. Если же посмотреть на отраженный от стакана свет, он будет голубым. Объясните наблюдаемое различие цветов.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Избранные задачи

1. Число 1995 может быть представлено в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел многими способами: например, 997 + 998, 664 + 665 + 666, 330 + 331 +332 + 333 + 334 + 335. В каком из таких представлений наибольшее число слагаемых?

С.Дворянинов

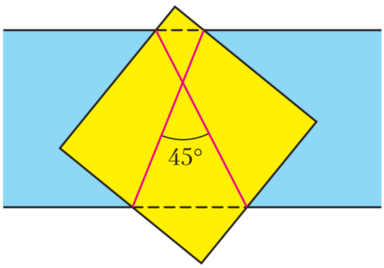
2. Имеется неограниченный запас монет в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и в 1 рубль. Известно, что сумму в A копеек можно уплатить B монетами. Докажите, что сумму в B рублей можно уплатить A монетами.

Д.Фомин

3. По поверхности стола перекатывают кубик, переворачивая его через ребра. Можно ли его перевернуть 12 раз так, чтобы он перевернулся по одному разу через каждое ребро и в результате оказался на прежнем месте?

С.Токарев

4. На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, притом



так, что его граница пересекла границу полосы в четырех точках (см. рисунок). Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются под углом $45°$.

В.Произволов

Об одном стихотворении А.С.Пушкина

А.КИКОИН

Среди поэтических сокровищ, оставленных нашим великим национальным поэтом А.С.Пушкиным, есть стихотворение, прямо относящееся к физике, точнее – к механике. Называется это стихотворение «Движение». Оно небольшое по объему – в нем всего 8 строк, но очень богатое по содержанию. В первых четырех строках читаем:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.

Здесь поэт рассказывает о легендарном споре двух древнегреческих философов. «Мудрец брадатый» – это Зенон Элейский; его противник в споре – Диоген Синопский. Первый утверждал, что движение невозможно; второй стал молча «пред ним ходить», как бы наглядно показывая несуразность такого утверждения.

А дальше А.С.Пушкин пишет:

Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит.
Однако ж прав упрямый Галилей.

Этими словами поэт показывает, что доказательство Диогена вовсе не такое безупречное, как казалось тем, кто хвалил «ответ замысловатый». В самом деле, ведь солнце ежедневно делает то же, что делал Диоген, маршируя перед Зеноном: оно «пред нами ходит». В действительности же, как вслед за Коперником утверждал «упрямый Галилей», солнце покоится, а движется (вращается вокруг своей оси) земля. Но никакого другого доказательства Диоген дать не мог, поэтому он и «смолчал».

Опубликовано в «Кванте» №10 за 1984 год.

Сейчас неправоту утверждения Зенона можно доказать, не прибегая к методу Диогена. Попробуем это сделать. Прежде всего, постараемся представить себе, как Зенон пришел к выводу, очевидно несуразному, что «движенья нет».

Зенон, по-видимому, рассуждал следующим образом. Тело, двигаясь по некоторой траектории, в любой момент времени может быть где-то застигнуто. Можно считать, что в этом месте и в это мгновенье тело покоится, т.е. что его скорость равна нулю. Следовательно, движение есть лишь название, данное множеству следующих одно за другим состояний покоя. В каждом таком состоянии покоя перемещение тела, естественно, равно нулю. Складывая это непрерывное множество нулей, Зенон, конечно, получал в итоге ноль: «движенья нет»!

Так вот, ошибка Зенона как раз и состоит в том, что скорость тела в каждой точке траектории он считал равной нулю. На самом деле в каждый момент времени движущееся тело обладает скоростью – так называемой мгновенной скоростью v. А раз оно обладает скоростью, то за любой сколь угодно малый промежуток времени Δt тело совершает малое перемещение $\Delta s = v\Delta t$. Число таких малых перемещений, в пределе – бесконечно малых, за все время движения t бесконечно велико. Но сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых равна не нулю, а вполне определенной величине: $s = vt$ (если скорость v одинакова во всех точках). Складывать нужно не нули, как это делал Зенон, а малые перемещения $v\Delta t$. На это впервые указал, спустя почти 2000 лет после легендарного спора, основоположник классической механики Исаак Ньютон, создавший кроме того еще и замечательный математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

В заключение сделаем не очень существенное для темы нашей статьи замечание. В действительности очный спор Зенона с Диогеном состояться не мог: Диоген (около 400–325 до н.э.) родился через 30 лет после смерти Зенона (490–430)!

За какое время сливаются капли?

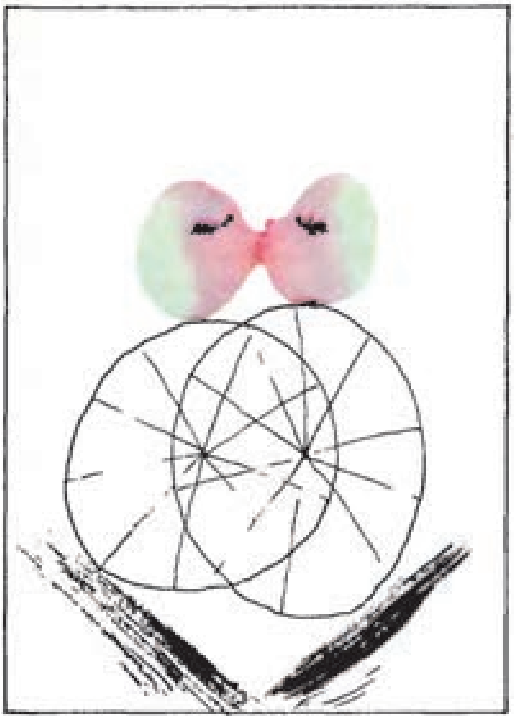
А.ВАРЛАМОВ

Сиживали ли вы когда-нибудь за тарелкой прозрачного куриного бульона, покрытого пятнышками золотистого жира? Если у вас при этом не было аппетита, то вы наверняка пробовали гонять эти пятнышки по тарелке, разрывая перегородки между ними или, наоборот, соединяя пятнышки воедино, наблюдая, как неспешно они сливаются, принимая форму круга.

Другое наблюдение из той же серии – за слиянием капелек ртути из разбитого термометра (осторожно – занятие это небезопасное, поскольку ртуть очень ядовита). Правда, тут вы даже не успеете моргнуть глазом, как из двух капелек образуется одна.

От чего же зависит время слияния жидких капель? Прежде чем попытаться ответить на этот вопрос, поговорим немного о причине слияния капель – о поверхностном натяжении жидкости. Причем мы попробуем взглянуть на это явление с точки зрения энергетической.

Молекулы, расположенные в тонком слое жидкости вблизи поверхности, находятся в особых условиях. Дело в том, что они имеют одинаковых с ними соседей только с одной стороны поверхности, в отличие от молекул внутри жидкости, окруженных со всех сторон себе подобными. Взаимодействие молекул на не слишком малых расстояниях носит характер притяжения. Если потенциальную энергию притяжения двух молекул, находящихся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, считать равной нулю, то при меньших расстояниях эта энергия будет отрицательной. По абсолютной же величине, в первом приближении, энергию каждой молекулы можно считать пропорциональной числу ближайших соседей. Поэтому ясно, что у молекул в поверхностном слое (число соседей для которых меньше, чем в объеме) потенциальная энергия оказывается выше, чем у молекул внутри жидкости. (Еще одним фактором увеличения потенциальной энергии молекул в поверхностном слое является то, что по мере приближения к поверхности концентрация молекул падает.)



Разумеется, молекулы жидкости не неподвижны, а находятся в непрерывном тепловом движении – одни молекулы уходят с поверхности, другие, наоборот, попадают на нее. Но и в этом случае можно говорить о

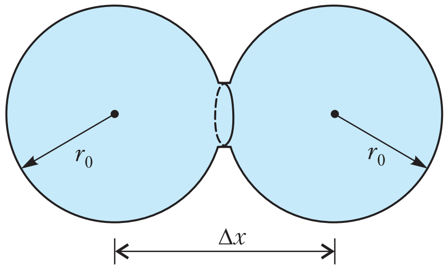
Опубликовано в «Кванте» №11 за 1990 год.

некоторой средней добавочной потенциальной энергии поверхностного слоя жидкости. А это означает, что, для того чтобы извлечь молекулу на поверхность, внешним силам необходимо совершить некоторую положительную работу. Избыток потенциальной энергии молекул, находящихся на участке поверхности единичной площади, по сравнению с потенциальной энергией, которой обладали бы эти же молекулы в толще жидкости, называется коэффициентом поверхностного натяжения σ. Он характеризуется той работой, которую необходимо затратить на увеличение свободной поверхности жидкости на единицу площади. Конечно же, такое определение σ полностью эквивалентно известному определению коэффициента поверхностного натяжения как силы, действующей на единицу длины границы жидкости.

Известно, что из всех возможных состояний системы устойчивым является то, в котором ее потенциальная энергия минимальна. В частности, и поверхность жидкости стремится принять такую форму, при которой ее поверхностная энергия в заданных условиях будет минимальной. Так, для одной капли в условиях, когда силой тяжести можно пренебречь, энергетически наиболее выгодна сферическая форма. Для двух или нескольких касающихся друг друга капель выгоднее слиться воедино – поверхность одного большого шара меньше, чем суммарная поверхность нескольких малых шаров с той же общей массой (проверьте это самостоятельно), а следовательно, поверхностная энергия у одной большой капли будет меньше.

Теперь мы можем вернуться к поставленному в самом начале вопросу: от чего же зависит время слияния двух капель? Над этим вопросом ученые начали задумываться довольно давно. Тем более, что он вовсе не праздный, а имеет, как оказалось, большое практическое значение. В частности – для понимания физических процессов, происходящих в порошковой металлургии, где спрессованные металлические зерна в процессе термической обработки «спекают» в вещества, обладающие уникальными свойствами. В 1944 году замечательный советский физик Я.И.Френкель предложил простейшую модель этого явления, в результате чего появилась его пионерская работа, заложившая физические основы порошковой металлургии. Основная идея этой работы и позволит нам оценить время слияния жидких капель. Для этого проще всего воспользоваться энергетическими соображениями.

Пусть две одинаковые капли в какой-то момент приходят в соприкосновение. В месте касания образуется перешеек (см. рисунок),



который начинает постепенно расти и растет до тех пор, пока слияние не завершится. Что же происходит с точки зрения энергии?

Всего в «активе» у системы двух капель имеется избыточная энергия $\Delta E_{\text{п}}$, равная разности поверхностных энергий начального и конечного состояний, т.е. разности энергий двух отдельных капель радиусом r_0 каждая и одной общей капли радиусом r:

$$\Delta E_{\text{п}} = 8\pi\sigma r_0^2 - 4\pi\sigma r^2 .$$

Так как при слиянии капель их полный объем не меняется, справедливо равенство

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3 ,$$

откуда получаем

$$r = r_0\sqrt[3]{2} .$$

Таким образом,

$$\Delta E_{\text{п}} = 4\pi\sigma\left(2 - 2^{2/3}\right)r_0^2 .$$

Согласно идее Френкеля, этот избыток энергии должен быть израсходован на работу против сил вязкого трения, возникающих в процессе перемещения вещества капель при их слиянии. Попробуем оценить величину этой работы.

Для определения силы вязкого трения воспользуемся выражением, найденным в середине прошлого века английским ученым Дж.Стоксом для шара радиусом R, движущегося в жидкости со скоростью v:

$$F = 6\pi\eta Rv .$$

Вошедший в эту формулу (называемую теперь формулой или законом Стокса) размерный коэффициент η называется коэффициентом вязкости или просто вязкостью. Он характеризует способность жидкости затормаживать относительное движение соседних слоев.

Понятно, что в нашем случае слияния жидких капель сила вязкого трения также может зависеть лишь от вязкости вещества капель, их линейных размеров и скорости протекания процесса слияния. Поэтому для оценки по порядку величины силы вязкого трения вполне допустимо использовать формулу Стокса. Только произведем в ней небольшую замену. А именно: вместо R подставим радиус наших капель r_0, вместо скорости шара v – скорость процесса слияния, обозначив ее тоже через v, а под η будем понимать вязкость вещества капель. Тогда для силы вязкого трения в нашем случае получим

$$F = 6\pi\eta r_0 v .$$

Заметим, что масштаб перемещения массы жидкости при слиянии капель – того же порядка, что и радиус капель: $\Delta x = r_0$. Поэтому работа сил вязкого трения будет равна

$$A = F\Delta x = 6\pi\eta r_0^2 v .$$

Из полученного выражения видно, что чем быстрее сливаются капли, тем большая энергия на это требуется (из-за возрастания сил вязкого трения). Но запас энергии у нас ограничен величиной $\Delta E_п$. Этим и определяется искомое время слияния капель τ (так называемое френкелевское время слияния). Оценивая скорость процесса как $v = r_0/\tau$, из условия $A = \Delta E_п$ получаем

$$6\pi\eta r_0^2 \frac{r_0}{\tau} = 4\pi\sigma\left(2 - 2^{2/3}\right) r_0^2 ,$$

или

$$\tau \sim \frac{r_0\eta}{\sigma} .$$

Вот несколько примеров. Для капель воды с $r_0 \sim 1$ см, $\sigma \sim 0{,}1$ Н/м и $\eta \sim 10^{-3}$ кг/(м · с) соответствующее время τ составляет всего лишь $\sim 10^{-4}$ с. А для значительно более вязкого глицерина с $\sigma \sim 0{,}01$ Н/м и $\eta \sim 1$ кг/(м · с) время слияния уже ~ 1 с. Таким образом, для различных жидкостей, в зависимости от их вязкости и поверхностного натяжения, время процесса слияния капель одного и того же радиуса может меняться в весьма широких пределах. Мало того, благодаря сильной зависимости вязкости от температуры (чего нельзя сказать о коэффициенте поверхностного натяжения), это время может существенно изменяться и для одной и той же жидкости.

Лунный тормоз

Л.АСЛАМАЗОВ

Издавна люди считали, что морские приливы связанны с Луной. Луна притягивает воду Мирового океана, и в том месте океана, над которым находится Луна, образуется водяной «горб». Горб «стоит» под Луной, а Земля вращается вокруг своей оси; поднявшаяся вода «наползает» на берег – наступает прилив, вода отступает – отлив. Казалось бы, такое объяснение выглядит вполне естественно. Однако признать его удовлетворительным нельзя: из него следует, что приливы должны наблюдаться один раз в сутки, а в действительности они бывают каждые 12 часов, т.е. два раза в сутки.

Первую теорию приливов, объясняющую это явление, создал Ньютон вскоре после открытия закона всемирного тяготения. В океане действительно образуются два горба: один – у ближайшей к Луне поверхности воды, а другой – с противоположной стороны Земли (рис. 1). Обсудим подробнее причину возникновения второго горба.

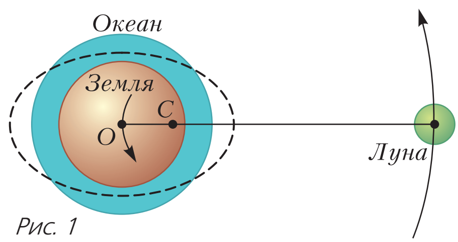
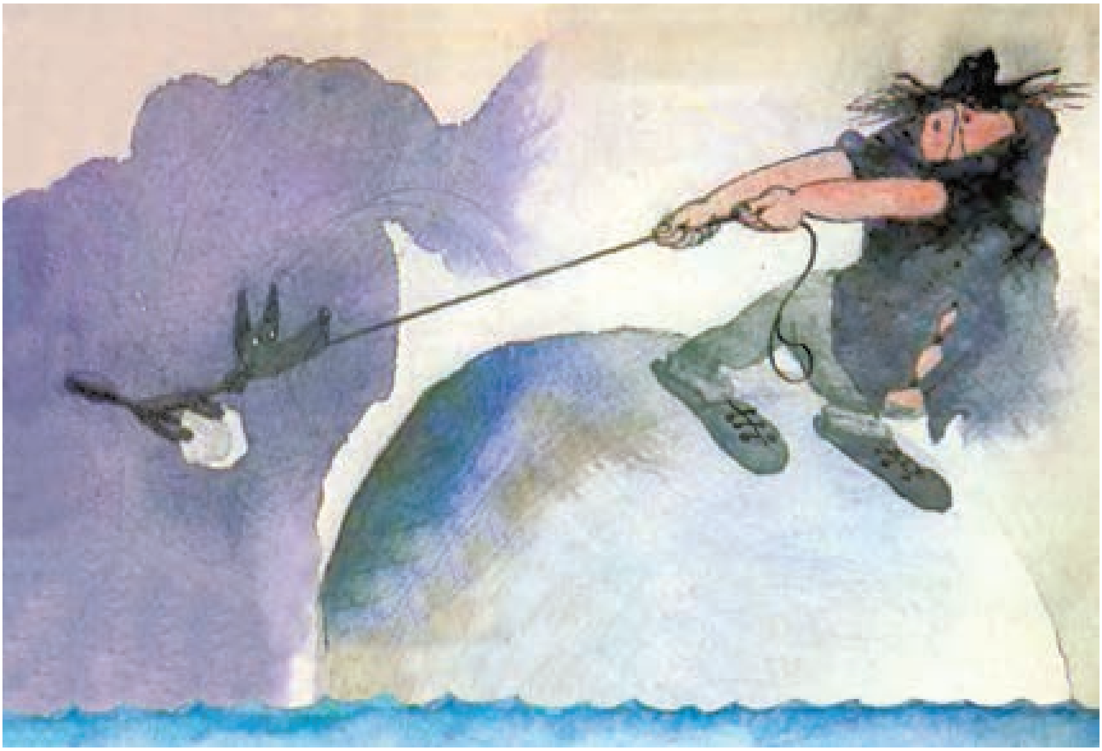


Рис. 1

Опубликовано в «Кванте» №8 за 1987 год.



Мы привыкли говорить, что Луна вращается вокруг Земли. На самом же деле и Луна и Земля вращаются вокруг общего центра. Если бы этого вращения не было, то под действием силы притяжения Луна упала бы на Землю (точнее, Земля и Луна упали бы друг на друга – ведь Луна тоже притягивает Землю). Как же происходит это вращение? Представим себе, что массы Земли и Луны одинаковы. Тогда они будут двигаться вокруг точки, которая лежит на середине отрезка, соединяющего их центры. Теперь давайте мысленно «наращивать» массу Земли. Тогда центр вращения будет смещаться в сторону Земли. Поскольку масса Земли гораздо больше массы Луны (в 81 раз), то центр вращения C оказывается лежащим внутри земного шара (но он обязательно смещен относительно центра Земли O).

Это вращение существенно влияет на картину приливов. Вода отступает от центра вращения. (Нечто подобное происходит в стакане воды, когда, размешивая воду ложкой, вы приводите ее во вращение, – вода отходит от центра стакана и поднимается у краев.) На дальней от Луны стороне Земли, где наименьшая сила притяжения, образуется водяной горб.

Конечно, приведенное нами объяснение приливов является весьма упрощенным. Мы не принимали во внимание неравномерность распределения воды по поверхности Земли, не учитывали влияния сил притяжения к Солнцу и других факторов, способных существенно изменить описанную картину. Однако ответ на главный вопрос мы получили: притяжение к Луне и вращение Земли вокруг общего с Луной центра C приводят к образованию двух приливных горбов в океане.

А теперь самое время объяснить принцип действия лунного тормоза. Оказывается, что водяные горбы находятся не на линии, соединяющей центры Земли и Луны (как для простоты показано на рисунке 1), а несколько смещены в сторону (рис. 2). Происходит это по следующей причине. Земля, вращаясь вокруг своей оси, увлекает за собой и воду в океане (это происходит потому, что существует трение). В результате этого по мере поворота Земли в приливные горбы должны вовлекаться все новые и новые массы воды. Деформация, однако, всегда запаздывает по отношению к вызываю-

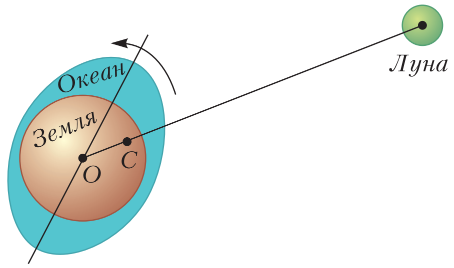


Рис. 2

щей ее силе (ведь сила создает ускорение, и должно пройти какое-то время, чтобы частицы приобрели скорость и сместились на заметные расстояния). Поэтому точка максимального поднятия воды (вершина горба) и точка на линии центров, где на воду действует максимальная сила притяжения к Луне, не совпадают. Образование горба происходит с некоторым запаздыванием, и он смещается в сторону вращения Земли. А в таком случае, как видно из рисунка 2, сила притяжения Луны к воде уже не проходит через центр собственного вращения Земли и как бы стремится «повернуть» ее в противоположную сторону, иными словами – тормозит ее вращение. Длительность суток каждодневно увеличивается!

«Лунный тормоз» безотказно работает уже многие миллионы лет. У окаменевших кораллов, живших в океане около 400 миллионов лет назад, ученые обнаружили структуры, связанные с суточным и годичным ростом кораллов. Структуры эти назвали суточными и годичными кольцами. Когда кольца подсчитали, то оказалось, что на каждый год приходится 395 суточных колец. Продолжительность года, т.е. времени, за которое Земля совершает полный оборот вокруг Солнца, с тех пор, по-видимому, не изменилась. Значит, тогда – 400 миллионов лет назад – в сутках было только 22 часа!

Лунный тормоз продолжает работать и сейчас, увеличивая длительность суток. К чему это может привести в отдаленном будущем? В конце концов время обращения Земли вокруг своей оси может сравняться со временем обращения Луны вокруг Земли, и тогда торможение прекратится. Земля будет обращена к Луне всегда одной стороной, точно так же, как обращена к нам одной стороной Луна (попробуйте сами объяснить, почему это произошло). Длительность суток на Земле увеличится, и в результате может измениться климат. Земля будет долго оставаться обращенной к Солнцу одной стороной, а на другой стороне в это время будет господствовать долгая ночь. Горячий воздух с нагретой стороны с огромной скоростью устремится к холодной, на Земле задуют сильные ветры, поднимутся песчаные бури...

Но такой прогноз может и не сбыться – ведь эти возможные времена столь далеки, что предсказать все изменения, которые произойдут в системе Земля–Луна–Солнце, просто невозможно. А если такая картина и окажется реальной, то люди обязательно придумают, как предотвратить бедствие.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Парадокс Вавилова

В.ФАБРИКАНТ

В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ ЧАСТО И плодотворно применяется понятие о пучке параллельных световых лучей, имеющем конечное поперечное сечение. Более того, даже в теории такого волнового явления, как интерференция, во многих случаях допустимо использование этого понятия. Во многих случаях, но далеко не во всех. В книге «Микроструктура света» известного советского физика С.И.Вавилова разобран весьма поучительный в этом смысле оптический парадокс.

Напомним коротко, как выглядит энергетика интерференционной картины. Интерференция, как мы знаем, есть сложение колебаний. В нашем случае в волнах колеблются значения напряженностей электрического и магнитного полей. Эти напряженности в каж-

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1971 год.

дой точке пространства в каждый момент времени определяют энергию электромагнитного поля. Электромагнитная волна переносит энергию, и можно ввести понятие о плотности потока энергии. Так мы называем величину, равную энергии поля, протекающей в единицу времени через единицу поверхности.

Каждая волна характеризуется еще и фазой. Если при сложении двух световых пучков разность их фаз остается все время одной и той же, мы говорим, что имеем дело с когерентными пучками.

В интерференционной картине, возникающей в результате сложения двух когерентных пучков, происходит пространственное перераспределение световой энергии. В светлых полосах энергия больше, чем сумма энергий складываемых пучков; в темных полосах, наоборот, меньше. Избыток энергии в светлых полосах как раз компенсируется недостатком ее в темных. Полная энергия, распределенная по всей интерференционной картине, точно равна сумме энергий двух интерферирующих пучков.

На рисунке 1 показана зависимость плотности потока энергии в интерференционной картине от смещения по экрану, на котором

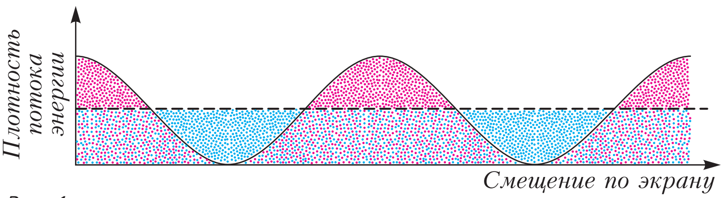


Рис. 1

она наблюдается. Картина получена при сложении двух когерентных световых пучков равной энергии. Горизонтальная пунктирная линия изображает сумму плотностей потоков энергий в складываемых пучках. Части кривой, идущие над этой прямой, соответствуют светлым интерференционным полосам, а части кривой, лежащие под пунктирной прямой, – темным. Суммарная энергия, распределенная в интерференционной картине, изображается площадью под кривой. Эта площадь точно равна площади под пунктирной прямой. Требования строгого бухгалтера природы – закона сохранения энергии – выполняются неукоснительно.

Перейдем теперь к парадоксу, рассказанному С.И.Вавиловым. Представьте два совершенно одинаковых когерентных резко ограниченных световых пучка шириной a каждый, пересекающихся под малым углом α. В области $ABCD$ происходит интерференция (рис.2).

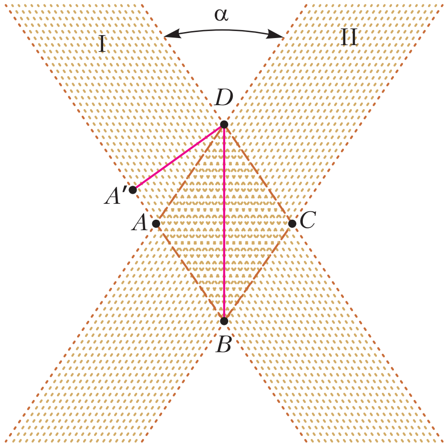


Рис. 2

Для наблюдения интерференционной картины можно установить экран, перпендикулярный плоскости чертежа и проходящий через точки A и C. Интерференционная картина будет состоять из прямолинейных чередующихся светлых и темных полос, заполняющих экран от точки A до точки C (рис.3).

Распределение плотности потока энергии в интерференционной картине соответствует графику на рисунке 1. Если у обоих пучков одинаковые начальные фазы световых колебаний, то разность фаз световых волн первого и второго пучков в точках, лежащих на прямой BD, будет равна нулю. Она соответствует, таким образом, середине центральной светлой полосы. В середине сосед-

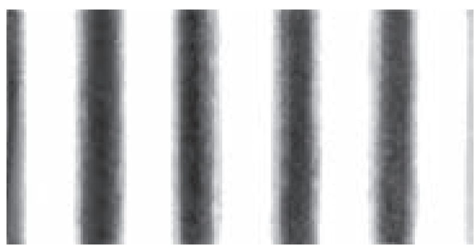


Рис. 3

ней, темной полосы разность фаз должна быть равна π, иными словами, световые колебания в обоих пучках должны быть в противофазе. Разность фаз $\Delta\varphi$ равна разности хода ΔL обеих волн до данного места, деленной на длину волны и умноженной на 2π:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta L}{\lambda}. \qquad (1)$$

Увеличению длины пути, проходимого волной, на λ соответствует запаздывание фазы на 2π. Из формулы (1) следует, что в середине ближайшей к центру интерференционной картины темной полосы ΔL должно быть равно $\frac{\lambda}{2}$.

Подсчитаем разность хода в точке A. Параллельный пучок можно рассматривать как поток плоских волн, перпендикулярных направлению световых лучей. Проведем через точку D (см. рис.2) одну из волновых поверхностей (поверхностей равной фазы) первого пучка. На этой волновой поверхности лежат точки D и A'. Пути, проходимые обоими пучками до точки D, одинаковы. Для того чтобы попасть в точку A, волновая поверхность первого пучка, проходившая ранее через точку D, должна сместиться на отрезок $A'A$, а волновая поверхность второго пучка, проходившая ранее также через точку D, должна сместиться на отрезок DA. В результате возникает разность хода

$$\Delta L = DA - A'A = \\ = a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = \frac{2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Ясно, что такая же разность хода, но с обратным знаком будет в точке C. Начнем теперь уменьшать угол α. При достаточно малом α можно сделать ΔL равным $\frac{\lambda}{4}$. Тогда вся область AC будет заполнена одной светлой интерференционной полосой. Следовательно, всюду энергия будет превышать сумму энергий двух пересекающихся пучков. Никакой компенсации за счет образования темных полос нет, так как они вообще отсутствуют! Можно получить и, так сказать, негативный результат, заставив пересекаться пучки с начальной разностью фаз, равной π. Тогда область AC будет заполнена темной интерференционной полосой. В первом случае непонятно, откуда берется дополнительная энергия, во втором – неясно, куда исчезает энергия.

Оба случая явно противоречат закону сохранения энергии. Очевидно, в наших рассуждениях есть какой-то дефект, приводящий к противоречию с одним из основных законов природы. Чтобы понять, в чем здесь дело, запишем формулу (2) для указанного случая, когда $\Delta L = \frac{\lambda}{4}$, и воспользуемся при этом малостью угла α ($\sin\alpha \approx \alpha$ для малых α). Мы покажем ниже, что угол α действительно очень мал. Тогда получим

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{2a\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\alpha} = \frac{a\alpha}{2}, \qquad (3)$$

или

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{a}. \qquad (4)$$

Возьмем a = 1 см, $\lambda = 5\cdot10^{-5}$ см, тогда $\alpha = 2{,}5\cdot10^{-5}$ радиана. Из (4) мы видим, что неприятности с законом сохранения энергии возникают при угле между пучками порядка отношения длины волны к величине поперечного сечения пучка.

Решение парадокса заключается в том, что при таких малых углах уже нельзя пользоваться понятием идеального параллельного пучка конечного сечения. При любой попытке реализовать такие пучки мы потерпим неудачу. Благодаря явлению дифракции, ограничение размеров пучка с необходимостью приводит к превращению его в расходящийся пучок. Угол расхождения пучка определяется как раз формулой (4). При этом, естественно, угол, под которым пересекаются пучки, можно определить лишь с точностью до величины порядка угла расхождения пересекающихся пучков.

Если бы дифракция еще не была открыта, мы на основании закона сохранения энергии и формулы (4) должны были бы не только догадаться о ее существовании, но и указать на основную закономерность, управляющую величиной дифракционного угла. Это хороший пример того, что закон сохранения в физике всегда может служить надежной путеводной звездой.

Наблюдения над туманом

А.БОРОВОЙ

Присматривались ли вы к тому, как появляется над рекой вечерний туман? Он возникает не сразу, а сначала сгущается над водоворотами и перекатами. Отдельные легкие облачка в лунном свете напоминают женские фигуры в белых одеждах. И начинаешь понимать наших предков, создавших так много легенд о русалках.

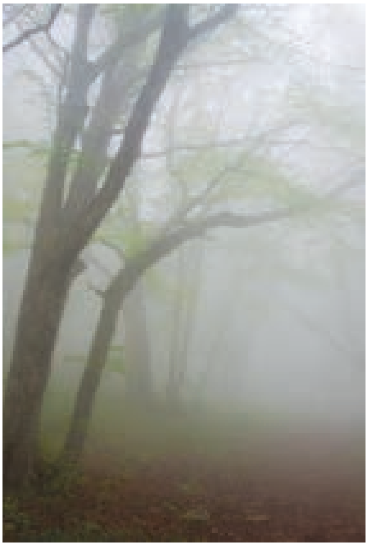
С описанием этого иногда удивительно красивого, а чаще тревожного и загадочного природного явления мы встречаемся и на страницах произведений художественной литературы. На полях этой и следующей страниц приведено несколько прозаических и стихотворных цитат, в которых описывается туман. Постарайтесь догадаться, кто их авторы.

Как часто удается любоваться туманом, зависит от особенностей местности. Например, для жителей Ньюфаундленда, острова, расположенного у берегов Канады в месте, где теплое течение Гольфстрим сталкивается с холодным Лабрадорским течением, туманы – постоянные гости. Третью часть года, включая практически все летние дни, остров покрыт густой дымкой. Наверное, даже самое красивое описание тумана вряд ли вызовет восхищение у жителей Ньюфаундленда. Настоящая «страна туманов» – Англия, «туманный Альбион». У нас в стране особенно богаты туманными днями побережья северных морей – Балтийского, Охотского, а также Кольский полуостров.

Если там, где вы живете, природные туманы – редкость, не забудьте, что у себя дома их можно видеть буквально на каждом шагу. Белое облачко, появляющееся из носика кипящего чайника,– это туман. В обиходе мы называем его паром, но это неверно, поскольку пар воды представляет собой бесцветный газ. Если быстро открыть бутылку с газированной водой, то над горлышком в первый момент появится дымок – это тоже туман. На улице в морозный день туман клубится над открытой водной поверхностью, над прорубями или полыньями, врывается в комнату через открытую форточку, возникает при дыхании (опять-таки мы привыкли говорить – «пар от дыхания»).

Образование тумана связано с тем, что при понижении температуры воздуха водяные пары, содержащиеся в

Опубликовано в «Кванте» №12 за 1986 год.



ТУМАНЪ м. (тьма, те́мень) густой паръ, водяные пары въ низшихъ слояхъ воздуха, на поверхности земли́; омраченный пара́ми воздухъ.

«Дитя, что ко мне ты так робко прильнул?» –
«Родимый, лесной царь в глаза мне сверкнул.
Он в темной короне, с густой бородой». –
«О нет, то белеет туман над водой».

Белая волокнистая пелена, затянувшая почти все болото, с каждой минутой приближалась к дому … Вот белесые кольца показались с обеих сторон дома и медленно слились в плотный вал, и верхний этаж с крышей всплыл над ним точно волшебный корабль на волнах призрачного моря.

Лишь высших гор до половины
Туманы покрывают скат,
Как бы воздушные руины
Волшебством созданных палат.

Внешность перемены была поразительна. Секунду назад мы мчались в ярких солнечных лучах, над нами было ясное небо, и далеко-далеко до самого горизонта море шумело и катило свои волны, а за нами бешено гнался корабль, изрыгая дым, пламя и чугунные ядра. И вдруг, во мгновение ока, солнце точно загасили, небо исчезло, даже верхушки мачт пропали из виду, и на глаза наши, словно их заволокло слезами, опустилась серая пелена. Сырая мгла стояла вокруг нас, как стена дождя. Волосы, одежда – все покрылось алмазными блестками.

Сегодня все вокруг заснуло,
Как дымкой твердь заволокло,
И в полумраке затонуло
Воды игривое стекло.

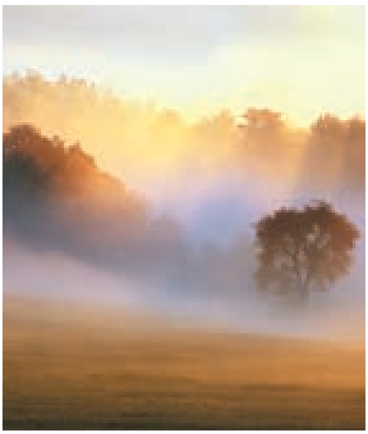
Какое-то странное, упоительное сияние примешалось к блеску месяца. Никогда еще не случалось ему видеть подобного. Серебряный туман пал на окрестность. Запах от цветущих яблонь и ночных цветов лился по всей земле.

Сентябрь холодный бушевал,
С деревьев ржавый лист валился,
День потухающий дымился,
Сходила ночь, туман вставал.

Туча кружево в роще связала,
Закурился пахучий туман.

Как грустна вечерняя земля!
Как таинственны туманы над болотами.

Ее глаза – как два тумана,
Полуулыбка, полуплач...



нем, в какой-то момент становятся насыщенными и при дальнейшем охлаждении начинают конденсироваться. И выделяют избыток влаги в виде мельчайших капель на центрах конденсации – пылинках, частицах дыма, ионах газа и т. п. Когда капли появляются в воздухе, мы говорим о тумане. А капли на поверхности земли, на листьях и траве называем росой.

Чтобы представить себе, насколько изменяется содержание водяного пара в воздухе при изменении температуры, приведем такие цифры: масса насыщенного водяного пара в 1 м^3 воздуха при $30\ ^\circ\text{C}$ составляет 30 г; при охлаждении воздуха до $10\ ^\circ\text{C}$ масса насыщенного пара уменьшается до 10 г/м^3; значит, в каждом кубометре воздуха 20 г воды должны выделиться в виде капель тумана или росы.

Размер капель, составляющих туман, вы можете определить следующим образом. Подержите в тумане стеклышко, смазанное вазелином, а потом рассмотрите под микроскопом оставшиеся на нем капли влаги. Микроскоп необходим, поскольку даже самые крупные капли достигают размеров всего лишь в десятки микрон, их диаметр почти в сто раз меньше толщины спички.

Обычно туманы не долговечны. Мелкие капли сливаются в более крупные и опускаются вниз – туман дождем выпадает на землю. Но может случиться и так, что в теплом потоке воздуха капли тумана испарятся и туман рассеется.

Все это можно наблюдать на простом опыте, для которого потребуются кофейник, сковорода и небольшой кусок резиновой трубки. Плотно вставим трубку в носик кофейника, нальем в него воду и поставим на плиту. Когда вода закипит, из трубки начнет вырываться белая струя водяного тумана. Поднесем (с помощью пинцета) конец трубки к холодной сковороде, стоящей на соседней конфорке. Туман будет подниматься над ней и частично оседать каплями на холодную поверхность металла. Но если сковороду разогреть – туман пропадет. В потоке нагретого воздуха плотность водяного пара становится ниже насыщенной, и капли воды не образуются (или испаряются).

«Граждане, рейс Москва – Воркута задерживается вылетом на два часа». К сожалению, объявления такого рода нередко можно услышать в аэропорту. Чаще всего задержка происходит как раз из-за тумана. Именно он мешает принимать самолеты, идущие на посадку, и мешает их взлету. Как с этим бороться?

Сначала инженеры предложили почти очевидный способ, который так хорошо «работал» в опыте со сковородой. Дело было во время войны. Английские летчики должны были отражать налеты фашистов. Но Англия – страна туманов, и летчик, вылетая с аэродрома, далеко не был уверен, что ему удастся совершить посадку в ясную погоду. И вот на шести английских аэродромах вдоль всей

посадочной полосы запылали огромные факелы. Они подогревали воздух, капли тумана испарялись, и видимость повышалась во много раз – вплоть до километра.

Но способ этот оказался дорогим и неэффективным. Дело в том, что при сгорании нефть сама образует много водяных паров, они непрерывно пополняют «резервы» тумана, и факелам в основном приходилось бороться самим с собой. В результате на каждом аэродроме за секунду сгорала целая бочка нефти. Если для небольших аэродромов это было уже достаточно накладно, то для современных взлетных полос потребовалась бы целая река нефти. От подогрева воздуха пришлось отказаться.

Более перспективным оказалось рассеяние над аэродромом веществ, поглощающих влагу, например тончайшего порошка хлористого кальция. Его частицы собирают капли тумана в более крупные и выпадают на землю дождем. Влажность воздуха падает, и туман рассеивается.

Раз речь зашла о туманах и самолетах, мы хотели бы упомянуть еще о двух связывающих их фактах.

Каждый из вас, наверное, не раз замечал в небе белый след от летящего самолета. Это – туман, образующийся из паров воды, поставщиком которых служит сгорающее топливо. Горячий выхлопной газ, насыщенный водяными парами, попадает в холодную атмосферу и образует туман.

Куда более страшный «туманный след» может тянуться за самолетом, потерпевшим аварию. Это – след из горючего, которое выброшено в воздушный поток и распылено им в мельчайшие капли. Возникший огонь может распространяться по такому следу со скоростью в десятки метров в секунду, так что никакие пожарные средства не сумеют подоспеть на помощь. В связи с этим возникла проблема введения в топливо веществ, существенно уменьшающих горючесть образовавшегося тумана. И такие работы ведутся.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: +7 495 363-48-86, htpp: //capitalpress.ru

Квант, который построил Исаак

А.Савин

Вот Квант, который построил Исаак,
А вот ученица,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

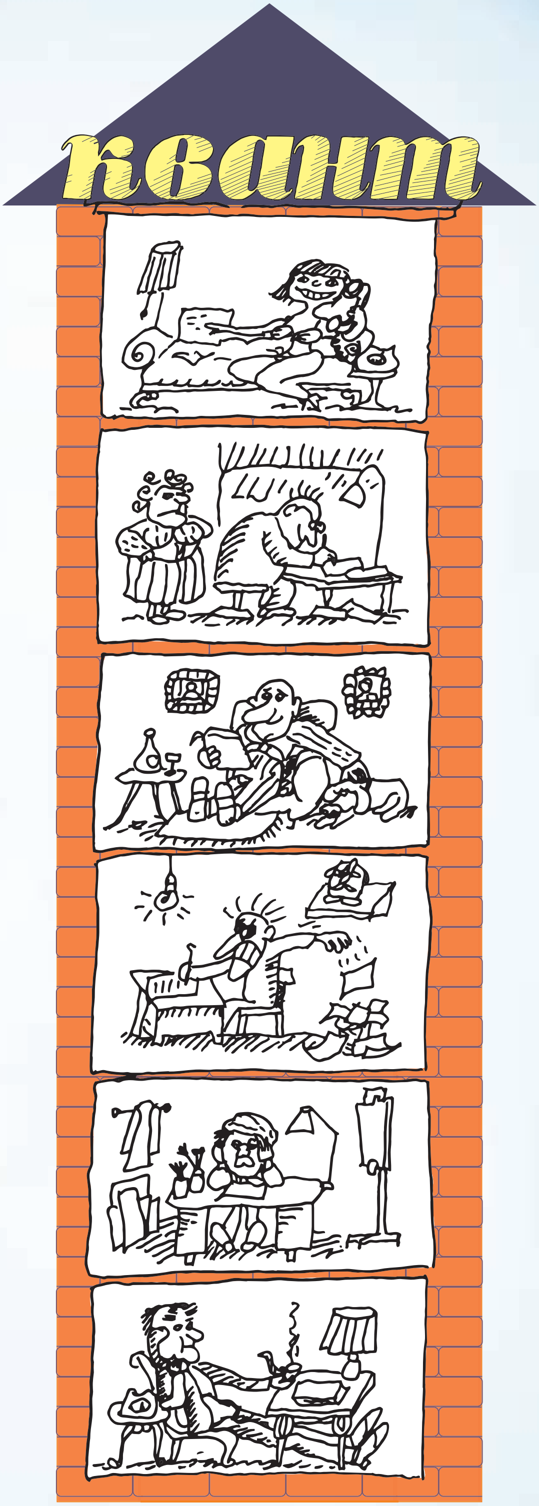
Вот автор статьи – знаменитый ученый,
Который писал ее так увлеченно
Для этой без меры серьезной девицы,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А вот рецензент – давний член редсовета,
Который прочел сочинение это,
Представив себя симпатичной девицей,
Которая тщетно мурыжит страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.

А это редактор, статью эту правивший,
Лишь автора имя на месте оставивший,
Чтоб даже тупейшая в мире девица
Смогла хоть единожды в год похвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А это художник в глубокой прострации
Пытается выдумать те иллюстрации,
Которые так очаруют девицу,
Что сходу она прочитает страницу
В Кванте, который построил Исаак.

Вот главный редактор – большой академик,
Он правит (за это не требуя денег),
Чтоб делалось все только так и вот так,
Поскольку он есть этот самый Исаак,
Который по уши влюбился в девицу,
Которая пальчиком тычет в страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.



Этот материал был опубликован в специальном выпуске «Кванта», посвященном 75-летию И.К.Кикоина.


Индекс 90964
Прогулки с физикой
КАЖЕТСЯ, ДОЖДИК СОБИРАЕТСЯ...
Можно ли под елкой укрыться от дождя?
(Подробнее – на с.12 внутри журнала)
ISSN 0130-2221 20001
9 770130 222207